Olimpiada de matematică – cl. a V-a şi a VI-a
Etapa judeţeană, 10 mai 2003

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

Clasa a V-a

I. 1. Suma a k numere naturale consecutive poate fi o putere a lui 2 ($k > 1$)?

2. Să se găsească restul împărţirii numărului $n = 1000^{1000}$ la 27.

Aurel Benza

II. 1. Determinaţi cel mai mic număr $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât 9^3 divide $\underbrace{999\ldots9}_{k \text{ cifre}}$.

Petru Asaftei

2. Avem la dispoziţie un număr nelimitat de jetoane pe care sunt scrise numerele naturale 5, 7 sau 11. Spunem că "am obţinut numărul n" dacă putem găsi jetoane cu suma numerelor de pe ele egală cu n. Arătaţi că 13 este cel mai mare număr care nu poate fi obţinut.

Valerica Benţa

III. La un stadion cu capacitatea de 10000 locuri, vin spectatorii. În primul minut vine un spectator, în al doilea minut vin trei spectatori, în al treilea minut vin cinci spectatori şi aşa mai departe. Să se afle după câte minute se umple stadionul.

Clasa a VI-a

I. Arătaţi că dacă $x + y$, $y + z$, $z + x$ sunt direct properţionale cu numerele $a + 1$, $a + 2$ şi $a + 3$, $a \in \mathbb{N}^*$, atunci $\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{x} \leq 4\dfrac{2}{3}$.

II. Fie $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}^*$. Demonstraţi că numerele: $a_1b_2c_3$, $a_2b_3c_1$, $a_3b_1c_2$, $-a_1b_3c_2$, $-a_2b_1c_3$, $-a_3b_2c_1$ nu pot fi simultan pozitive.

III. 1. În triunghiul ABC, bisectoarea unghiului B intersectează înălţimea AM, $M \in (BC)$, în punctul O. Construim $OP \perp AB$, $P \in (AB)$.

a) Dacă P este mijlocul lui $[AB]$, demonstraţi că măsura unghiului $\angle BAM$ este $30°$.

b) Dacă O este centrul de greutate al triunghiului, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

Marius Farcaş

2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $[BM] \equiv [AN]$. Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{CPN}$, unde $BN \cap CM = \{P\}$.

ERRATA

1. În finalul soluţiei problemei **XII.26** (RecMat 1/2003, p. 64) au fost omise rândurile: "*... în cazul $A = R$. Dacă $A = Q$, atunci $(M, \cdot) \cong (\mathbb{Q}, +)$, însă grupurile $(\mathbb{Q}, +)$ şi $\left(\mathbb{Q}_+^*, \cdot\right)$ nu sunt izomorfe. În sfârşit $\left(\mathbb{Z}_+^*, \cdot\right)$ nu este grup.*".

2. În enunţul problemei **V.40** (RecMat 1/2003, p. 80) în loc de "$2n + 3$ *submulţimi*" se va citi "$4n + 3$ *submulţimi*".