Concursul "Alexandru Myller"
Ediţia I, Iaşi, 4 - 6 aprilie 2003

Alexandru Myller (1879 - 1965) s-a născut în Bucureşti dintr-o familie de intelectuali. A absolvit Facultatea de Ştiinţe – secţia matematică din Bucureşti. Între anii 1902 - 1906 se află în Germania pentru a continua studiile. În 1906, la Götingen, susţine teza de doctorat sub conducerea lui *David Hilbert*. Tot aici îl cunoaşte pe *Felix Klein*, fondatorul faimosului *"Program de la Erlangen"*. Reîntors în ţară, este titularizat în 1910 ca profesor de geometrie analitică la Univ. "Al. I. Cuza" din Iaşi.

În 1910 pune bazele unei *biblioteci*, *Seminarul Matematic*, care se va dezvolta treptat, şi a unei *şcoli de geometrie* ce va fi renumită în întreaga lume. Este iniţiatorul unei colecţii de modele geometrice şi se preocupă de problemele învăţământului secundar. A adus contribuţii de valoare în *geometria diferenţială, ecuaţii diferenţiale şi integrale* şi *istoria matematicii.*

A fost *rector al universităţii ieşene* în perioada 1945 - 46. Din 1949 este *membru al Academiei Române*. În 1960 universitatea Humbold din Berlin i-a conferit titlul de *doctor honoris causa*.

Notă. Concursul "Al. Myller" se adresează *elevilor din clasele VII - XII care au obţinut premii şi menţiuni la fazele superioare ale olimpiadelor şcolare din anul în curs sau cel anterior*. Prima ediţie a acestui concurs a fost sprijinită de către *Univ. "Al. I. Cuza"* şi *Filiala din Iaşi a SSMR*. Sarcina organizării şi desfăşurării acesteia au avut-o *I. S. J. Iaşi* şi următoarele licee: *Colegiul Naţional* şi *Liceul de Informatică "Gr. Moisil"*. Această ediţie a Concursului "Al. Myller" a fost un succes deplin sub aspect calitativ şi organizatoric.

Clasa a VII-a

1. Determinaţi numerele întregi a, b, c, d care verifică relaţiile $a^2 + b^2 = 2(c + d)$ şi $c^2 + d^2 = 2(a + b)$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

2. Fie $ABCD$ un pătrat fix şi punctele variabile $M \in (BC)$, $N \in (CD)$ astfel încât $MN = BM + DN$. Demonstraţi că măsura unghiului $\measuredangle NAM$ este constantă.

Gheorghe Iurea, Iaşi

3. Se consideră un triunghi ABC, un punct $M \in (AC)$ şi punctul $N \in BC$ astfel încât $MN \perp BC$. Perpendiculara din C pe AN şi perpendiculara dusă în B pe BC se intersectează în P, iar dreptele MP şi AN se intersectează în Q. Demonstraţi că $AP \perp CQ$ dacă şi numai dacă $AB \perp AC$.

Petru Răducanu, Iaşi

4. Fie a, b, c numere reale astfel încât $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq 1$ şi $ab + bc + ca = 1$. Demonstraţi că $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2$.

Mircea Becheanu, Bucureşti

Clasa a VIII-a

1. Determinaţi numerele x, y, z care verifică relaţiile $x+y \geq 2z$ şi $x^2+y^2-2z^2 = 8$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

2. Un tetraedru regulat cu muchiile de lungime 1 se proiectează pe un plan. Demonstraţi că aria figurii obţinute este cel mult 1/2.

* * *

3. Fie tetraedrul $ABCD$ în care $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$ şi G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale feţelor BCD, ACD, ABD respectiv ABC. Determinaţi lungimea minimă a unui drum care este situat pe feţele tetraedrului şi trece prin G_A, G_B, G_C, G_D.

* * *

4. Fie $n \geq 3$ un număr întreg. Demonstraţi că este posibil ca, eliminând cel mult două dintre elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, să obţinem o mulţime care are suma elementelor pătrat perfect.

Mihai Bălună, Bucureşti

Clasa a IX-a

1. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi O un punct în interiorul acestuia. Notăm cu a, b, c, d, e, f respectiv ariile triunghiurilor formate de O cu AB, BC, CD, DA, AC şi BD. Să se arate că $|ac - bd| = ef$.

Alexandru Myller

2. *a*) Arătaţi că există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, astfel încât $f(f(k)) = k$, $\forall k \in \{1, 2, 3\}$.

b) Arătaţi că, dacă f este o funcţie ca la *a*), atunci numerele a, b, c nu sunt toate întregi.

Gheorghe Iurea, Iaşi

3. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$. Să se arate că $\frac{3}{2} \leq \frac{ab-1}{ab+1} + \frac{bc-1}{bc+1} + \frac{ca-1}{ca+1} < 2$.

Mircea Becheanu, Bucureşti

4. Fie $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$ primul cadran şi $T : S \to S$, $T(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ o transformare a lui S. Numim "S - dreaptă" intersecţia dintre S şi o dreaptă din plan.

a) Arătaţi că orice S - dreaptă fixă a lui T conţine punctele fixe ale lui T.

b) Determinaţi S - dreptele fixe ale lui T.

($M \subset S$ se numeşte submulţime fixă a lui T dacă $T(M) = M$).

Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a X-a

1. Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon regulat înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ şi M un punct în planul acestuia. Să se arate că $nR \leq MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_n \leq n(R + OM)$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

2. Fie polinomul $f(X) = X^n + 2X^{n-1} + 3X^{n-2} + \cdots + nX + n + 1$ şi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n+2} + i\sin\frac{2\pi}{n+2}$. Să se arate că $f(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon^2) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon^{n+1}) = (n+2)^n$.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

3. Fie ABC şi ADE două triunghiuri dreptunghice cu $m(\measuredangle B) = m(\measuredangle D) = 90°$ şi $AB = AD$. Fie F proiecţia lui B pe AC şi G proiecţia lui D pe AE. Să se arate că punctele B, F, E sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele D, G, C sunt coliniare.

* * *

4. La un concurs se dau cinci probe, cu rezultatul admis - respins. Care este numărul minim de participanţi la concurs pentru care, orice rezultate ar obţine aceştia, să existe doi concurenţi A şi B astfel încât A să fie admis la toate probele la care a fost admis şi B?

*** * ***

Clasa a XI-a

1. Considerăm $\mathcal{A}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^{n+1} = 2003^n A\right\}$, unde n este un număr natural nenul fixat.

a) Arătaţi că $\mathcal{A}_n$ conţine o infinitate de elemente.

b) Determinaţi $\mathcal{A}_3 \cap \mathcal{A}_{2003}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ două matrice cu proprietatea că, oricare ar fi o matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pentru care $AX = O_{3,1}$, avem că $BX = O_{3,1}$. Să se arate că există o matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $B = CA$.

Mircea Becheanu, Bucureşti

3. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 0$ există numerele raţionale strict pozitive $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ cu următoarele proprietăţi:

a) $\dfrac{a_0}{0!} + \dfrac{a_1}{1!} + \ldots + \dfrac{a_n}{n!} = \dfrac{1}{n!}$;

b) $a_0 + a_1 + \ldots + a_n < \dfrac{3}{2^n}$.

Dorin Andrica, Cluj - Napoca

4. Să se determine funcţiile derivabile $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

a) $f(0) = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{3} f'\left(\dfrac{x}{3}\right) + \dfrac{2}{3} f'\left(\dfrac{2x}{3}\right)$, $\forall x \in [0, \infty)$.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

Clasa a XII-a

1. Fie f şi g două polinoame cu coeficienţi raţionali, ireductibile în $\mathbb{Q}[X]$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ astfel încât $f(\alpha) = g(\beta) = 0$. Să se arate că, dacă $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$, atunci f şi g au acelaşi grad.

Bogdan Enescu, Buzău

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t \cos^2(2t) \cos^3(3t) \ldots \cos^{2002}(2002t)\, dt$.

Dorin Andrica, Cluj - Napoca

3. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel necomutativ, unitar şi $a, b, c \in A$ astfel încât $ab + c = 1$. Dacă există $x \in A$ astfel încât $a + cx$ este inversabil, atunci există $y \in A$ astfel încât $b + yc$ este inversabil.

Andrei Nedelcu şi Lucian Lăduncă, Iaşi

4. *a)* Să se arate că există $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\sin x}{x^n}\, dx$ şi aceasta este finită, unde $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

b) Dacă se notează cu $l_n = \displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\sin x}{x^n}\, dx$, să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} l_n$.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc