Concursul "Adolf Haimovici", ediţia a VII-a[1]

pentru liceele economice, industriale şi agricole

Faza judeţeană, 22 februarie 2003

Clasa a IX-a

1. Să se demonstreze că există o singură funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, astfel încât a, Δ, P şi S să fie numere întregi consecutive în această ordine.

2. Să se arate că dacă $a,b,c\in[0,+\infty)$ şi $a+b+c=1$, atunci

$$abc\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)\leq\frac{8}{729}.$$

3. Să se scrie ecuaţiile laturilor unui triunghi ABC dacă se cunosc $A(1,3)$ şi ecuaţiile a două mediane: $x-2y+1=0$ şi $y-1=0$.

Clasa a X-a

1. *a*) Se consideră numerele reale strict pozitive a_1, a_2, a_3 cu produsul $p=a_1a_2a_3$ diferit de 1. Dacă $m=\log_p a_1$, $n=\log_p a_2$, să se exprime în funcţie de m şi n numărul $\log_p a_3^q$, unde $q\in\mathbb{R}$.

b) Dacă $m=\log_{70}2$, $n=\log_{70}5$, calculaţi $\log_{70}49$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $3^{|x+1|}-2\,|3^x-1|=3^x+2$.

2. *a*) Arătaţi că $\dfrac{1}{(a+1)^2}<\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}<\dfrac{1}{a^2}$, $a\in(0,\infty)$.

b) Demonstraţi că $\dfrac{1}{101^2}+\dfrac{1}{102^2}+\cdots+\dfrac{1}{2002^2}+\dfrac{1}{2003^2}<10^{-2}$.

3. Fie O mijlocul laturii BC a triunghiului ABC, M un punct pe perpendiculara în O pe planul (ABC). Fie D proiecţia pe BC a lui A, E proiecţia pe MB a lui A, F proiecţia pe MC a lui A. Arătaţi că dacă $MO=\dfrac{1}{2}BC$, atunci $(ADE)\perp(ADF)$.

Clasa a XI-a

I. 1. Să se rezolve ecuaţia în x: $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x&a&b&c\\x^2&a^2&b^2&c^2\\x^3&a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=0$, unde $a,b,c\in\mathbb{C}$. Discuţie.

2. Valorile parametrului real a pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}2&x&3\\x&-1&x\\3&x+2&a+3\end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x\in\mathbb{R}$ sunt:

a) $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$; *b*) $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$; *c*) $(-\infty,1)\cup(2,\infty)$; *d*) $\emptyset$; *e*) $\mathbb{R}$.

II. 1. Să se studieze convergenţa şirului $a_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)$, $n\geq 1$.

2. Fie $a_n=\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}$.

[1] **Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

$a)$ Să se determine $\lim\limits_{x\to 0} a_1$.

$b)$ Să se demonstreze că $a_n = a_{n-1}\cos nx + \dfrac{1-\cos nx}{x^2}$.

$c)$ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} a_n$.

III. 1. Studiaţi continuitatea funcţiei $f(x) = \begin{cases} (x+e^x)^{1/x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$.

2. Valorile $a, b, c \in \mathbb{R}$ aşa încât $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(ax - \sqrt{cx^2+bx-2}\right) = 1$ sunt:

$a)$ $a = c = 1,\ b = 0$; $b)$ $a = 0,\ b = 1,\ c < 0$; $c)$ $a > 0,\ c < 0,\ b = 0$; $d)$ $\nexists$; $e)$ $a = b = c = 0$.

Clasa a XII-a

I. Fie mulţimea $A = (0,\infty) - \{1\}$, $a \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Definim pe A legea de compoziţie $x * y = x^{\alpha \log_a y}$. Notăm cu $G_{a,\alpha} = (A, *)$. Demonstraţi că $G_{a,\alpha}$ este grup abelian.

II. Arătaţi că dacă $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ şi $\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$, atunci $|z| = 1$.

III. 1. Să se determine $k \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln\left(x^2+1\right), & x > 0 \\ xe^{2x} + k, & x \leq 0 \end{cases}$ să admită primitive şi să se găsească o primitivă a sa.

2. Determinaţi primitivele funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2 - 2x^2\cos 2\alpha + 1}$, unde α este oarecare din intervalul $(0, \pi/4)$, iar $D \subseteq \mathbb{R}$.

Faza interjudeţeană, Iaşi, 9 - 11 mai, 2003

Clasa a IX-a

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $-7 < \dfrac{x^2+(m+1)x-5}{x^2-x+1} < 3$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a^3 - x} = a$.

3. $a)$ Să se demonstreze identitatea $\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \dfrac{1}{8}$.

$b)$ Se dă paralelogramul $ABCD$. Fie $M \in [DC]$ astfel încât $\dfrac{DM}{DC} = k$ şi $N \in [AM]$ astfel încât $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{NA}$. Să se arate că $D - N - B$ coliniare.

Clasa a X-a

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $3a_4^2 + a_6^2 + 6(a_4 + a_6 + 2) = 0$, aflaţi: $a)$ a_1, r; $b)$ a_8, S_8.

2. Fie numerele $a, b, c \in (1, 2]$. Să se demonstreze egalitatea:

$$\log_a(3b-2) + \log_b(3c-2) + \log_c(3a-2) \geq 6.$$

3. $a)$ Dacă $a, b \in \mathbb{R}^*$, în dezvoltarea $(a+b)^n$ nu există trei termeni consecutivi egali;

$b)$ Să se arate că partea întreagă a numărului $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$ este un număr natural impar, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Clasa a XI-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ distincte şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)}$.

$a)$ Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ are derivată în } x\}$;

$b)$ Să se arate că funcţia f are două puncte de extrem local x_1, x_2, iar dacă $a < b$ atunci $x_1, x_2 \in [a, b)$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p\sqrt{2!} + 3^p\sqrt[3]{3!} + \cdots + n^p\sqrt[n]{n!}}{n^{p+2}}$.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$, $0 \le a^2 + b^2 < 1$. Să se arate că $A^m \ne O_n$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, dar $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = O_n$.

Clasa a XII-a

1. Fie $G = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ şi operaţia $x * y = x^{\log_a y}$, $\forall x, y \in G$, $a > 0$, $a \ne 1$. Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian şi $(G, *) \cong (\mathbb{R}^*, *)$.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$.

3. Fie $G = \left\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 5b^2 = 1\right\}$.

$a)$ Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian;

$b)$ Să se arate că G are cel puţin 2003 elemente.

Recreaţii ... matematice

Soluţiile problemelor enunţate la pagina 18.

1. Cei patru oameni procedează astfel:

– a şi b trec podul (2 minute);
– a se întoarce (1 minut);
– c şi d trec podul (10 minute);
– b se întoarce (2 minute);
– a şi b trec podul (2 minute).

În acea noapte, după 17 minute, a, b, c şi d trec astfel podul.

2. Modificarea necesară se vede pe figură.