Olimpiada de matematică - faza judeţeană, Iaşi

Baraj, clasa a X-a, 21 februarie 2002

1. Fie $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ şi $z_1,z_2\in\mathbb{Z}[i]$. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) $z_2=z_1$ sau $z_2=\overline{z_1}$; (ii) $2^{\operatorname{Re} z_1}+2^{\operatorname{Im} z_1}=2^{\operatorname{Re} z_2}+2^{\operatorname{Im} z_2}$.

Vlad Martinuşi, Iaşi

2. Se consideră inegalitatea:

$$|\cos nx|\le n\cdot|\cos x|\,,\ n\in\mathbb{N}^*,\ x\in\mathbb{R} \qquad (*)$$

$a)$ Să se determine n ştiind că $(*)$ este adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$;
$b)$ Să se determine x ştiind că $(*)$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Gheorge Iurea, Iaşi

3. Se consideră $\triangle ABC$, M un punct oarecare în interiorul său. Fie D, E, F mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ şi fie punctele M_1, M_2, M_3 pe semidreptele $(MD$, $(ME$, respectiv $(MF$, în exteriorul triunghiului, astfel încât: $\dfrac{MD}{DM_1}=\dfrac{ME}{EM_2}=\dfrac{MF}{FM_3}$. Să se demonstreze că dreptele AM_1, BM_2 şi CM_3 sunt concurente.

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

4. Demonstraţi că în orice interval $(a,b)\subset(0,1)$ nu există numere raţionale de forma $\lg n-[\lg n]$, $n\in\mathbb{N}^*$, dar există o infinitate de numere reale de această formă.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Olimpiada de matematică - clasele V - VI

Faza judeţeană, 18 mai 2002, Iaşi

Clasa a V-a

1. $a)$ Un număr de trei cifre împărţit la răsturnatul său dă câtul 2 şi restul 100, iar diferenţa dintre cifra sutelor şi cea a unităţilor numărului este 4. Aflaţi numărul.
$b)$ Să se rezolve în $\mathbb{N}^3$ ecuaţia $x\cdot y=\dfrac{z+2}{z-1}$.

Cristina Vâlcu, Iaşi

2. $a)$ Să se arate că $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2002^2}<2$.
$b)$ Fie $d_1,d_2,\ldots,d_n$ toţi divizorii naturali ai numărului a. Să se arate că $(d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_n)^2=a^n$.

3. Aflaţi cifrele a, b în baza 10 pentru care este adevărată egalitatea $\dfrac{a}{b}=\overline{b,a}$.

Clasa a VI-a

1. Fie numerele $a_1,a_2,\ldots,a_{10}\in\{-1,1\}$ şi suma $S=|a_1+a_2|+|a_2+a_3|+$ $+|a_3+a_4|+\ldots+|a_9+a_{10}|$.
$a)$ Determinaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare pe care o poate lua S;
$b)$ Arătaţi că S nu poate lua valoarea 15.

Ciprian Baghiu, Iaşi

2. Fie numerele raţionale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_{2002}$ invers proporţionale cu numerele $1, 2, \ldots, 2002$. Să se afle numărul raţional x dacă $2002 \cdot a_{2002} = x\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_{2002}}{2003}\right)$.

Sergiu Prisacariu, Iaşi

3. Fie $[AB]$ un segment şi $C \in (AB)$. De aceeaşi parte a dreptei AB se construiesc triunghiurile echilaterale ACD şi CBE. Dacă M este mijlocul lui $[AE]$, iar N mijlocul lui $[BD]$, arătaţi că:

a) $[AE] \equiv [BD]$;

b) triunghiul CMN este echilateral;

c) $MN \| AB$ dacă şi numai dacă $[AC] \equiv [CB]$.

Gheorge Iurea, Iaşi

Soluţii

Clasa a V-a

1. *a*) Din ipoteză, $\overline{abc} = 2\overline{cba} + 100$ şi atunci c este o cifră pară. Cum $a - c = 4$, a este o cifră pară mai mare decât 4. Considerând succesiv cazurile $a = 6$ şi $a = 8$, obţinem singura soluţie acceptabilă $\overline{abc} = 692$.

b) Trebuie ca $\frac{z+2}{z-1} \in \mathbb{N}$, de unde $z - 1 \mid z + 2$. Însă $z - 1 \mid z - 1$, deci $z - 1 \mid (z + 2) - (z - 1)$, adică $z - 1 \mid 3$. Rezultă că $z \in \{2, 4\}$. Analizând cele două cazuri, obţinem soluţiile $(1, 4, 2)$, $(2, 2, 2)$, $(4, 1, 2)$, $(1, 2, 4)$, $(2, 1, 4)$.

2. *a*) Evident că $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2002^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{2001 \cdot 2002}$. Însă $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2001 \cdot 2002} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} = 1 - \frac{1}{2002} < 1$, de unde concluzia.

b) Putem presupune $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$; atunci $d_1 = \frac{a}{d_n}$, $d_2 = \frac{a}{d_{n-1}}$, $d_n = \frac{a}{d_1}$. Concluzia rezultă prin înmulţirea acestor relaţii membru cu membru.

3. Observăm că $b \neq 0$ şi atunci $\frac{a}{b}$ nu poate fi fracţie subunitară, deci $a \geq b$. Obţinem soluţia $a = 0$, $b = 1$ şi putem presupune în continuare $a > b \geq 2$. Deoarece $\frac{a}{b}$ este fracţie neperiodică, numitorul său poate fi doar 2, 4, 5 sau 8. Analizând fiecare situaţie mai obţinem doar soluţia $a = 5$, $b = 2$.

Clasa a VI-a

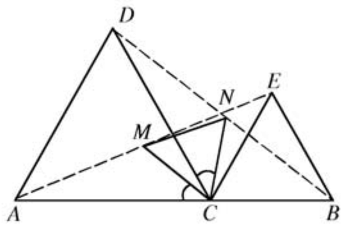
1. *a*) Evident că $S \geq 0$ şi deoarece pentru $a_1 = a_3 = \ldots = a_9 = 1$, $a_2 = a_4 = \ldots = a_{10} = -1$ obţinem $S = 0$, rezultă că minimul sumei este 0. Observăm că $S \leq 18$ şi pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_{10} = 1$ obţinem $S = 18$, deci maximul sumei este 18.

b) În interiorul fiecărui modul avem unul dintre numerele -2, 0, sau 2, deci S este un număr par, adică $S \neq 15$.

2. Deoarece $1 \cdot a_1 = 2 \cdot a_2 = \ldots = 2002 \cdot a_{2002}$, obţinem că $a_2 = \frac{a_1}{2}$, $a_3 = \frac{a_1}{3}$, $\ldots, a_{2002} = \frac{a_1}{2002}$. Înlocuind în ipoteză, $a_1 = x\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{a_1}{2002 \cdot 2003}\right)$ şi cum $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2002 \cdot 2003} = 1 - \frac{1}{2003} = \frac{2002}{2003}$, rezultă că $x = \frac{2003}{2002}$.

3. a) Se observă imediat că $\triangle DCB \equiv \triangle ACE$ (LUL), de unde $[DB] \equiv [AE]$.

b) Se arată că $\triangle ACM \equiv \triangle DCN$ (LUL), deci $[CM] \equiv [CN]$ şi $\widehat{ACM} \equiv \widehat{DCN}$. Atunci $m(\widehat{MCN}) = m(\widehat{ACD}) - m(\widehat{ACM}) + m(\widehat{DCN}) =$ $=60°$, adică $\triangle CMN$ este isoscel cu un unghi de $60°$, de unde concluzia.



c) Dacă $MN \| AB$, atunci $m(\widehat{NCB}) = m(\widehat{CNM}) = 60°$ şi cum $m(\widehat{CAD}) = 60°$, rezultă că $NC \| AD$. Însă N este mijlocul lui $[BD]$, deci NC va fi linie mijlocie în $\triangle BAD$, adică C este mijlocul lui $[AB]$. Reciproca se demonstrează uşor.

Premianţii Olimpiadei de Matematică - Premiile M. E. C.
Faza finală, Râmnicu Vâlcea, 2002

Clasa a VII-a: Timofte Diana (C. N. "E. Racoviţă"), Vâlcu Ruxandra (Col. Naţional) - **menţiune**.

Clasa a VIII-a: Pachiţariu Marius (Col.Naţional), Hăvârneanu Raluca (C.N. "C.Negruzzi") - **menţiune**.

Clasa a IX-a: Iacob Alin (C. N. "C. Negruzzi") - **menţiune**.

Clasa a X-a: Anton Constantin, Romanescu Răzvan (ambii C. N. "C. Negruzzi") - **menţiune**.

Clasa a XI-a: Sucilă Andrei (C. N. "C. Negruzzi") - **menţiune**.

Calificaţi în lotul lărgit pentru a 6-a O. B. M. J.: Pachiţariu Marius, Mustaţă Irina, Vâlcu Ruxandra (toţi Col. Naţional).

Premianţii Olimpiadei de Matematică
Faza judeţeană, Iaşi

Clasa a V-a: Gaftea Alexandru, Neagu Victor (ambii Col. Naţional), Vieriu Antonela (C. N. "C. Negruzzi"), Cozma Andrei (C. N. "E. Racoviţă") - **premiul I**; Bivol Mark (C. N. "C. Negruzzi"), Cojocaru Alexandra (Col. Naţional), Lazăr Laura (C. N. "E. Racoviţă"), Pricop Mircea (Lic. Informatică), Sârbu Cristian, Temneanu Bogdan, Daneliuc Ana, Costea Ramona, Ibănescu Tudor (toţi C. N. "C. Negruzzi"), Ungureanu Dragoş (Lic. "G. Ibrăileani"), Alexandru Ion (Lic. "M. Eminescu"), Galearschi Ana (C. N. "C. Negruzzi"), Haureş Sergiu (Col. Naţional), Gavriluţă Alina, Mustaţă Andrei (ambii C. N. "C. Negruzzi"), Simon Teodora (C. N. "E. Racoviţă") - **premiul II**; Arhip Andra (Col. Naţional), Petrov Robert (Lic. Informatică), Airimitoaie Andrei, Luchian Alexandra, Tudori Ioana (toţi C. N. "C. Negruzzi"), Conea Alexandru, Florea Ioana (ambii C. N. "E. Racoviţă"), Volintiru Ioana, Vasiliu Ana, Cucu Lucian, Zaharia Diana (toţi C. N. "C. Negruzzi"), Mahu Adriana, Afloarei Elena, Târcoveanu Filip, Bandac Alexandra (toţi C. N. "E. Racoviţă"), Ilaş George (Col. Naţional), Chiţac Răzvan, Stoian Vlad (ambii Lic. Informatică) - **premiul III**.

Clasa a VI-a: Răileanu Ioana, Roşu Eugenia, Gâlcă Octavia, Igna Răzvan (toţi C. N. "C. Negruzzi"), Baibarac Arina (Şc. nr. 22), Codrea Sorina (C. N. "E. Racoviţă"), Istrate Ciobanu Ioana (Lic. "M. Sadoveanu", Paşcani) - **premiul I**; Panaghiu Gheorghe (Lic. "M. Eminescu"), Airinei Adriana (C. N. "C. Negruzzi"), Mihăilă Laura (Col. Naţional), Aniţa Flavia (Lic. "M. Eminescu"), Echimov Tania (Lic. "I. Neculce, Târgu Frumos), Alexa Ioana (Col. Naţional), Furcoi Vlăduţ, Poiată Raluca (ambii C. N. "C. Negruzzi"), Chiriac Andreea (C. N. "E. Racoviţă"), Diaconu Daniel (Col. Naţional) - **premiul II**; Dima Georgiana (C. N. "E. Racoviţă"), Loghin Alexandru (Şc. "P. Rareş", Hârlău), Cărare Sabina (Lic. Informatică), Andron Georgiana (Col. Naţional), Florea Alexandru, Răţoi Mihăiţă (ambii C. N. "C. Negruzzi"), Dolhaşcu Simona (Lic. "M. Sadoveanu", Paşcani), Didilescu Mădălina, Ianuş Andrada (Col. Naţional), Diaconescu Alexandra (C. N. "E. Racoviţă"), Roşca Ioana (Lic. "G. Ibrăileanu"), Dumitrescu Bogdan (Şc. nr. 22) - **premiul III**.