Olimpiada de matematică - faza judeţeană, Iaşi

Baraj, clasa a X-a, 21 februarie 2002

1. Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ şi $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) $z_2 = z_1$ sau $z_2 = \overline{z_1}$; (ii) $2^{\operatorname{Re} z_1} + 2^{\operatorname{Im} z_1} = 2^{\operatorname{Re} z_2} + 2^{\operatorname{Im} z_2}$.

Vlad Martinuşi, Iaşi

2. Se consideră inegalitatea:

$$|\cos nx| \leq n \cdot |\cos x|, \ n \in \mathbb{N}^*, \ x \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

$a)$ Să se determine n ştiind că $(*)$ este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
$b)$ Să se determine x ştiind că $(*)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorge Iurea, Iaşi

3. Se consideră $\triangle ABC$, M un punct oarecare în interiorul său. Fie D, E, F mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ şi fie punctele M_1, M_2, M_3 pe semidreptele $(MD$, $(ME$, respectiv $(MF$, în exteriorul triunghiului, astfel încât: $\dfrac{MD}{DM_1} = \dfrac{ME}{EM_2} = \dfrac{MF}{FM_3}$. Să se demonstreze că dreptele AM_1, BM_2 şi CM_3 sunt concurente.

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

4. Demonstraţi că în orice interval $(a, b) \subset (0, 1)$ nu există numere raţionale de forma $\lg n - [\lg n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, dar există o infinitate de numere reale de această formă.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Olimpiada de matematică - clasele V - VI

Faza judeţeană, 18 mai 2002, Iaşi

Clasa a V-a

1. $a)$ Un număr de trei cifre împărţit la răsturnatul său dă câtul 2 şi restul 100, iar diferenţa dintre cifra sutelor şi cea a unităţilor numărului este 4. Aflaţi numărul.
$b)$ Să se rezolve în $\mathbb{N}^3$ ecuaţia $x \cdot y = \dfrac{z+2}{z-1}$.

Cristina Vâlcu, Iaşi

2. $a)$ Să se arate că $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2002^2} < 2$.
$b)$ Fie $d_1, d_2, \ldots, d_n$ toţi divizorii naturali ai numărului a. Să se arate că $(d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n)^2 = a^n$.

3. Aflaţi cifrele a, b în baza 10 pentru care este adevărată egalitatea $\dfrac{a}{b} = \overline{b,a}$.

Clasa a VI-a

1. Fie numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{10} \in \{-1, 1\}$ şi suma $S = |a_1 + a_2| + |a_2 + a_3| + |a_3 + a_4| + \ldots + |a_9 + a_{10}|$.
$a)$ Determinaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare pe care o poate lua S;
$b)$ Arătaţi că S nu poate lua valoarea 15.

Ciprian Baghiu, Iaşi