Clasa a VII-a: Vâlcu Ruxandra (Col. Naţional) - **premiul I**; Timofte Diana (C. N. "E. Racoviţă") - **premiul II**; Găină Răzvan, Hudici Ştefan, Teodorescu Horia (toţi C. N. "C. Negruzzi"), Zanoschi Delia (Col. Naţional), Mihul Andrei (Lic. Informatică), Ţigănaş Vladimir (Şc. nr. 42) - **premiul III**.

Clasa a VIII-a: Pachiţariu Marius (Col. Naţional) - **premiul I**; Hăvârneanu Raluca, Popovici George (ambii C.N. "C.Negruzzi"), Comandar Dragoş (C.N. "E.Racoviţă") - **premiul II**; Berdan Alexandra (C. N. "E. Racoviţă") - **premiul III**.

Clasa a IX-a: Ichim Andrei (C. N. "E. Racoviţă") - **premiul I**; Mustaţă Irina (Col. Naţional), Iacob Alin (C. N. "C. Negruzzi") - **premiul II**; Hopu Claudia (Lic. Informatică) - **premiul III**.

Clasa a X-a: Romanescu Răzvan (C. N. "C. Negruzzi") - **premiul I**; Cârjă Oana, Iosub Daniela (ambii C. N. "C. Negruzzi"), Gîrlea Codruţa (Lic. "M. Sadoveanu", Paşcani) - **premiul II**; Anton Constantin (C. N. "C. Negruzzi"), Popa Alexandru (Lic. Informatică) - **premiul III**.

Clasa a XI-a: Munteanu Ionuţ (C. N. "E. Racoviţă") - **premiul I**; Sucilă Andrei (C. N. "C. Negruzzi") - **premiul I**; Dumitraşcu Aurel, Boureanu Ioana, Crăcan Arcadie (toţi C. N. "C. Negruzzi") - **premiul III**.

Clasa a XII-a: Stan Dana (Lic. "D. Cantemir") - **premiul I**; Aldea Cristina (Lic. Informatică) - **premiul II**; Sechelea Andrei, Târniceriu Adrian (toţi C. N. "E. Racoviţă"), Marangoci Oana (Lic. "M. Sadoveanu", Paşcani) - **premiul III**.

Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori
Ediţia a VI-a, Târgu - Mureş, 22 -28 iunie 2002

A. Problemele de concurs - enunţuri şi soluţii

1. Fie ABC un triunghi isoscel ($AC = BC$) şi P un punct de arcul $\overset{\frown}{AB}$ al cercului circumscris triunghiului, ce nu conţine punctul C. Fie D proiecţia lui C pe PB. Demonstraţi că $PA + PB = 2PD$.

Grecia

2. Cercurile C_1 şi C_2 de raze diferite se intersectează în A şi B astfel încât AB separă centrele O_1 şi O_2. Fie B_1, B_2 diametral opuse lui B în C_1, respectiv C_2 şi M mijlocul segmentului $[B_1B_2]$. Pe C_1 şi C_2 considerăm punctele M_1, respectiv M_2 astfel încât $\widehat{AO_1M_1} \equiv \widehat{AO_2M_2}$, B_1 este interior unghiului $\widehat{AO_1M_1}$ şi B este interior unghiului $\widehat{AO_2M_2}$. Demonstraţi că $\widehat{MM_1B} \equiv \widehat{MM_2B}$.

Cipru

3. Găsiţi numerele naturale N cu proprietăţile
- N are exact 16 divizori $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{16} = N$;
- divizorul d_5 este egal cu $(d_2 + d_4)\, d_6$.

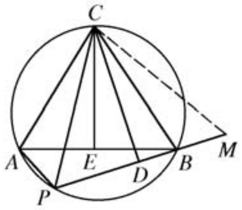
Bulgaria

4. Arătaţi că $\dfrac{1}{b\,(a+b)} + \dfrac{1}{c\,(b+c)} + \dfrac{1}{a\,(a+c)} \geq \dfrac{27}{2\,(a+b+c)^2}$, $\forall a, b, c \in (0, \infty)$.

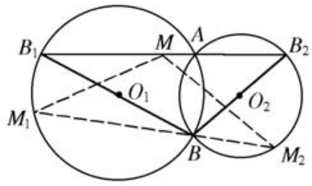
Grecia

1. Soluţia I. Conform teoremei lui Ptolemeu, $PA \cdot BC + PB \cdot AC = PC \cdot AB$ şi cum $AC = BC$, avem că $PA + PB = \dfrac{PC \cdot AB}{AC} = \dfrac{2AE \cdot PC}{AC}$, unde E este piciorul inălţimii din C, deci mijlocul lui $[AB]$. Atunci problema revine la a arăta că $2PD = \dfrac{2AE \cdot PC}{AC}$, adică $\dfrac{PD}{PC} = \dfrac{AE}{AC}$, i.e. $\cos \widehat{CPB} = \cos \widehat{CAB}$, evident adevărat.

Soluţia II. Prelungim $[PB]$ cu segmentul $[BM] \equiv [AP]$. Atunci $\triangle BCM \equiv \triangle ACP$, deci $[CP] \equiv [CM]$, adică $\triangle CPM$ este isoscel, cu înălţimea CD. Urmează că $[PD] \equiv [DM]$, deci $2PD = PM = PB + BM = PB + PA$.



2. Este imediat că B_1, A, B_2 sunt puncte coliniare. Atunci MO_1 este linie mijlocie în $\triangle B_1BB_2$, deci $MO_1 = \frac{1}{2}BB_2 = AO_2$ şi analog $MO_2 = AO_1$. Urmează că $\triangle MO_1A \equiv \triangle AO_2M$, de unde $\widehat{MO_1A} \equiv \widehat{MO_2A}$ şi atunci $\widehat{MO_1M_1} \equiv \widehat{MO_2M_2}$. De aici, $\triangle MO_1M_1 \equiv \triangle MO_2M_2$ şi rezultă că $[MM_1] \equiv [MM_2]$. Pe de altă parte, $m(\widehat{ABM_2}) + m(\widehat{ABM_1}) = \left(180^\circ - \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} = 180^\circ$ (unde $a = m(\widehat{AO_1M_1}) = m(\widehat{AO_2M_2})$), deci punctele M_1, B, M_2 sunt coliniare. Atunci unghiurile din concluzie sunt la baza unui triunghi isoscel, adică ele sunt congruente.



3. Cum N are exact 16 divizori, el nu poate avea mai mult de 4 divizori primi diferiţi. În plus, N este par; altfel toţi divizorii ar fi impari şi a doua condiţie ar conduce la o absurditate. Rezultă că $d_2 = 2$.

Observăm că $2 + d_4 \geq d_5 \geq 7$, deci $d_4 \geq 5$. Cum $d_4 < d_5 \leq 2 + d_4$, urmează fie că $d_5 = d_4 + 1$, fie că $d_5 = d_4 + 2$. În primul caz, $d_6 = 2 + d_4$ şi atunci N are trei divizoori consecutivi, deci $N \,\vdots\, 3$, de unde $d_3 = 3$. Deoarece $N \,\vdots\, 6$, avem succesiv $d_4 = 6$, $d_5 = 7$, $d_6 = 8$, adică $N \,\vdots\, 4$ şi ar trebui ca $d_4 = 4$, contradicţie.

Rămâne că $d_5 = 2 + d_4$. Analizăm situaţiile:

• $N \,\vdots\, 4$; cum $d_4 \geq 5$, avem $d_3 = 4$, deci $N \,\vdots\, 8$. Însă $d_6 \geq 8$, deci $8 \in \{d_4, d_5, d_6\}$. Dacă $d_4 = 8$, atunci $d_5 = 10$, deci $N \,\vdots\, 5$ şi ar trebui ca $d_4 = 5$, absurd. Dacă $d_5 = 8$, avem $d_4 = 6$, deci $N \,\vdots\, 3$, adică $d_3 = 3$, imposibil. Dacă $d_6 = 8$, atunci $d_5 = 7$, $d_4 = 5$ şi prin urmare $N \,\vdots\, 10$. Însă $d_7 = (2 + 5)\, 8 = 56 > 10$, contradicţie.

Urmează că N nu este multiplu de 4, deci d_3 prim.

• $N \,\vdots\, 3$; rezultă că $d_3 = 3$, de unde $N \,\vdots\, 6$ şi cum $d_4 \geq 6$, obţinem $d_4 = 6$, $d_5 = 8$, adică $N \,\vdots\, 4$, absurd. În concluzie, N nu se divide cu 3 şi deci $d_3 \geq 5$, $d_4 \geq 7$.

Cum N şi $2 + d_4$ nu se divid cu 4, rezultă că d_4 este impar. Deoarece $2 + d_4$ şi d_4 nu se divid cu 3, obţinem că $d_4 = 3k + 2$, în fapt $d_4 = 6l + 5$, $l \in \mathbb{Z}$. Dar $d_5 \leq 16$, adică $7 \leq d_4 \leq 14$. Singura posibilitate este ca $d_4 = 11$, $d_5 = 13$. Cum $2d_3$ este divizor al lui N, $2d_3 \geq d_4$, deci $d_3 \geq 6$. În plus, $d_3 < 11$ şi d_3 prim, adică $d_3 = 7$.

Obţinem în final că $N = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002$.

4. Soluţia I. Din inegalitatea mediilor,

$$\left(\frac{1}{b\,(a+b)} + \frac{1}{c\,(b+c)} + \frac{1}{a\,(a+c)}\right)^3 \geq \frac{27}{abc\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}.$$

Pe de altă parte, înmulţind membru cu membru inegalităţile $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$ şi $\left(\dfrac{2(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3 \geq (a+b)(b+c)(c+a)$, obţinem că $\dfrac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \dfrac{3^3 \cdot 3^3}{2^3(a+b+c)^6}$, ceea ce încheie demonstraţia.

Soluţia II. Conform inegalităţii Cauchy - Schwarz, $[(a+b)+(b+c)+(c+a)] \times \times \left[\dfrac{1}{b(a+b)} + \dfrac{1}{c(b+c)} + \dfrac{1}{a(a+c)}\right] \geq \left(\dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{b(a+b)} + \dfrac{1}{c(b+c)} + + \dfrac{1}{a(a+c)} \geq \left(\dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{2(a+b+c)}$. Rămâne să demonstrăm că $\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \dfrac{1}{2(a+b+c)} \geq \dfrac{27}{2(a+b+c)^2} \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq \geq 27$. Însă $a+b+c \geq \dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{3}$ şi $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right) \geq 9$, ceea ce încheie demonstraţia.

B. Probleme aflate în atenţia juriului

1. Un elev joacă pe calculator. Calculatorul îi prezintă 2002 numere pozitive alese la întâmplare. Regulile jocului îi permit următoarele operaţii:

– să ia două dintre numerele date, să-l dubleze pe primul, să-l adauge pe al doilea şi să păstreze suma;

– să ia alte două numere dintre cele rămase, să-l dubleze pe primul, să-l adauge pe al doilea, să multiplice suma cu precedenta şi să păstreze rezultatul;

– să repete procedeul până utilizeaza toate cele 2002 numere.

Elevul câştigă jocul dacă produsul obţinut în final este maximul posibil. Găsiţi strategia câştigătoare şi demonstraţi-o.

2. Numerele naturale pozitive sunt aranjate în forma:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \ldots \\ 2 & 5 & 9 & 14 & \ldots & \\ 4 & 8 & 13 & \ldots & & \\ 7 & 12 & \ldots & & & \\ 11 & \ldots & & & & \\ \ldots & & & & & \end{array}$$

Găsiţi numărul coloanei şi al liniei pe care este pus numărul 2002.

3. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $abc = 2$. Demonstraţi inegalitatea

$$a^3 + b^3 + c^3 > a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}.$$

4. Fie a, b, c numere reale pozitive. Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

5. Dacă pentru numerele reale $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ au loc: $a_1 \neq 0$, $a_1a_6 + a_3a_4 = = 2a_2a_5$ şi $a_1a_3 \geq a_2^2$, demonstraţi că $a_4a_6 \leq a_5^2$. Când are loc egalitatea?

6. Se dau 2002 întregi a_i, $i = 1, 2, \ldots 2002$ astfel că $a_1^{-3} + a_2^{-3} + \ldots + a_{2002}^{-3} = 1/2$. Demonstraţi că cel puţin trei dintre ei sunt egali.

7. Fie triunghiul ABC, centrul său de greutate G şi mijloacele A_1, B_1, C_1 ale laturilor BC, CA, AB. Paralela prin A_1 la BB_1 intersectează B_1C_1 în F. Demonstraţi că triunghiurile ABC, FA_1A sunt asemenea dacă şi numai dacă patrulaterul AB_1GC_1 este inscriptibil.

8. Fie triunghiul ABC, ortocentrul H, centrul I al cercului înscris, centrul O al cercului circumscris. CI retaie cercul circumscris în L. Se ştie că $AB = IL$ şi $AH = OH$. Găsiţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

9. Fie triunghiul ABC de arie S şi D, E, F puncte arbitrare pe BC, CA, AB. Perpendicularele în D, E, F pe BC, CA, AB taie cercul circumscris în perechile de puncte $(D1, D2)$, $(E1, E2)$, $(F1, F2)$. Demonstraţi

$$|D_1B \cdot D_1C - D_2B \cdot D_2C| + |E_1C \cdot E_1A - E_2C \cdot E_2A| + |F_1A \cdot F_1B - F_2A \cdot F_2B| > 4S.$$

10. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AB = AD$ şi $BC = CD$. Se aleg punctele K, L, L_1, K_1 pe AB, BC, CD, DA încât KLL_1K_1 să fie dreptunghi. Se consideră apoi dreptunghiurile: $MNPQ$ înscris în triunghiul BLK ($M \in KB$, $N \in BL$, $P, Q \in LK$) şi $M_1N_1P_1Q_1$ înscris în triunghiul DK_1L_1 ($M_1 \in DK_1$, $N_1 \in DL_1$ şi $P_1, Q_1 \in L_1K_1$). Fie $2S$, $2S_1$, S_2 şi S_3 ariile lui $ABCD$, KLL_1K_1, $MNPQ$, $M_1N_1P_1Q_1$. Găsiţi cea mai mare valoare posibilă a expresiei: $(2S_1 + S_2 + S_3)/2S$.

11. Fie $A_1, A_2, \ldots A_{2002}$ puncte în plan. Demonstraţi că oricare ar fi cercul de rază unitate în plan şi oricare ar fi dreptunghiul înscris în el, există trei vârfuri M, N, P ale dreptunghiului încât $MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_{2002} + NA_1 + NA_2 + \ldots + NA_{2002} + PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{2002} \geq 6006$.

La această olimpiadă au participat 8 ţări (Albania având probleme de nerezolvat cu deplasarea). În clasamentul neoficial pe naţiuni România ocupă detaşat locul I cu 219 puncte din 240 posibile, urmează Bulgaria cu 170, Moldova cu 158. Componenţii echipei României au obţinut următoarele rezultate:

Problema	1	2	3	4	Total	Medalii
Kreindler Gabriel	10	10	10	10	*40*	*aur*
Pachiţariu Marius	10	10	9	10	*39*	*aur*
Ungureanu Andrei	10	10	8	9	*37*	*aur*
Ibram Remzi	10	10	6	10	*36*	*aur*
Mihăilescu Ioana	10	10	6	9	*35*	*aur*
Michnea Dragoş	10	9	8	5	*32*	*argint*

Echipa ţării a fost condusă de prof. **Dan Brânzei** asistat de prof. **Dinu Şerbănescu**.