Concursul "Adolf Haimovici", ediţia a VI-a
pentru liceele economice, industriale şi agricole

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

Faza judeţeană, 23 februarie 2002

Clasa a IX-a

I. Fie ecuaţia $mx^2 + (3m-1)x + 2m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ aşa încât $x_1, x_2 > 0$.

b) Determinaţi o relaţie între soluţii, independentă de m.

II.1. Rezolvaţi inecuaţia $\dfrac{x-1}{x+1} \leq \dfrac{m-1}{m+1}$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Discuţie.

2. Arătaţi că dacă $x + y \geq 1$, atunci $x^2 + y^2 \geq \dfrac{1}{2}$.

3. Determinaţi $p, q \in \mathbb{R}$ şi soluţiile x_1, x_2 ale ecuaţiei $x^2 + px + q = 0$, ştiind că $x_1 + 1$, $x_2 + 1$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - px + q = 0$.

III.1. Aflaţi partea întreagă a numărului $\dfrac{1}{5\sqrt{2} - 7} + \sqrt{3}$.

2. Să se rezolve ecuaţia $\left[\dfrac{x-2}{3}\right] = \dfrac{x+2}{4}$.

3. Determinaţi α aşa încât soluţiile ecuaţiei $\left(1+\alpha^2\right)x^2 + (1+\alpha)x + \alpha(1-\alpha) = 0$, să verifice inegalitatea $-1 \leq \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_1 x_2} \leq 0$.

Clasa a X-a

I.1. Rezolvaţi inecuaţia $\dfrac{3 \cdot 2^{x-1}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

2. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y} = \dfrac{65}{36} \\ xy - x + y = 118 \end{cases}$.

II.1. Rezolvaţi inecuaţia $\log_a 2 + \log_a \left(4^{x-2} + 9\right) \leq 1 + \log_a \left(2^{x-2} + 1\right)$.

2. Să se rezolve şi să se discute după $m \in \mathbb{R}$ ecuaţia $\lg\left(x + \dfrac{5}{x}\right) - \lg\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{m}\right) = \lg m$.

III.1. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$, aşa încât ecuaţia $\sqrt{2|x| - 2x} = 5m - x$ să admită trei soluţii reale distincte.

2. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică de raţie r, iar $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie geometrică de raţie q. Să se calculeze în funcţie de a_1, r, b_1, q suma $S = \dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{b_n}$.

Clasa a XI-a

I. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$.

a) Să se determine toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $A^2X = XA^2$.

b) Să se determine (dacă există) matricele $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2Y - YA^2 = I_2$.

c) Calculaţi A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

II. Fie x_1, x_2, x_3 soluţiile ecuaţiei $x^3 + x^2 + ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calculaţi $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$ în funcţie de a şi b.

b) Arătaţi că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$.

c) Pentru $\Delta = 0$, $b = -37$ să se rezolve ecuaţia dată.

III. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit de relaţia: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$, $x_0 > 1$.

a) Arătaţi că $x_n > 1$.

b) Studiaţi monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ în funcţie de x_0.

Clasa a XII-a

I.1. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\sqrt{3 - 2x}$ o primitivă a funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$, $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$. Calculaţi numărul $F(1) - F(0)$.

2. Să se calculeze integrala $\int \frac{dx}{x^4 + 9}$.

II. Fie mulţimea $G = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 2 - x & x - 1 \\ 2(1 - x) & 2x - 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a) Arătaţi că există şi sunt unice matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ce nu conţin x astfel încât $M(x) = A + xB$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

b) Demonstaţi că G formează grup abelian în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

c) Arătaţi că $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right) \simeq (G, \cdot)$.

III. Fie funcţiile $f, g, G : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)(2 + \ln x)}$, $g(x) = \frac{1}{x(a + \ln x)}$, $a > 0$ şi $G(x) = \ln(a + \ln x)$.

a) Să se arate că G este o primitivă a lui g.

b) Dacă F este o primitivă a lui f, calculaţi $I(x) = F(x) - F(1)$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} I(x)$.

Faza interjudeţeană, 18 mai 2002

Clasa a IX-a

I. Fie familia de funcţii $f_m(x) = mx^2 - (2m - 1)x + m - 1$, $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Să se determine m aşa încât vârfurile parabolelor asociate acestor funcţii să se afle pe dreapta de ecuaţie $y = x$.

b) Să se arate că parabolele familiei trec printr-un punct fix.

II. Să se rezolve:

a) $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$.

b) $\begin{cases} \left|x^2-3x+2\right|+4y=4 \\ |x-2|+|y-1|=1 \end{cases}$.

III. Fie expresia: $f(x)=\dfrac{x^4+2ax^3+3a^2x^2+2a^3x+a^4+9}{x^2+ax+a^2}$, unde $|a|<2$.

a) Să se calculeze $\left(x^2+ax+a^2\right)^2$.

b) Să se afle x pentru care $f(x)$ are un minim.

Clasa a X-a

I. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}}\cdot\log_3 x=-1$.

II. *a*) Să se demonstreze identitatea: $C_n^0-C_n^1+C_n^2+\ldots+(-1)^n C_n^n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Fie $x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}$, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Arătaţi că: $x_1-C_n^1x_2+C_n^2x_3-C_n^3x_4+\ldots+(-1)^n C_n^n x_{n+1}=0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

III. Termenul al patrulea al dezvoltării binomului $\left(\dfrac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}}+a\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^8$ este $56a^{11/2}$. Să se determine x.

Clasa a XI-a

I. Din formula $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, să se deducă suma primelor n numere naturale nenule.

II. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordinul doi, se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1+5a & 10a\\ -2a & 1-4a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$ are loc $X(a)\cdot X(b)=X(ab+a+b)$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $X(a)$ este inversabilă şi să se afle inversa sa.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$ avem $(X(1))^n=X(2^n-1)$.

III. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q} \\ 2x^3, \text{ dacă } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$.

Clasa a XII-a

I. Fie $G=(-1,2)$ şi asocierea $x*y\overset{\text{def}}{=}\dfrac{xy+4x+4y-2}{2xy-x-y+5}$, $\forall x,y\in G$.

a) Să se arate că $(G,*)$ este grup abelian.

b) Să se arate că funcţia $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{-x+2}{x+1}$ este izomorfism între grupurile $(G,*)$ şi $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$.

c) Calculaţi $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de 10 ori}}$.

II. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_n=\displaystyle\int_2^3\frac{1}{|n-x|+2}dx$. Să se studieze convergenţa şirului şi în caz afirmativ să se afle limita sa.

III. Fie F acea primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$, pentru care $F(0)=0$. Să se calculeze $F(1)+F(-1)$.