Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori

Ediţia a V-a, Nicosia (Cipru), 17 - 22 iunie 2001

A. Problemele propuse - enunţuri şi soluţii

1. Găsiţi toate numerele naturale a, b, c astfel ca $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$.

România

2. Fie ABC un triunghi cu $m(\measuredangle ACB) = 90°$ şi $AC \neq BC$. Punctele L şi H de pe segmentul AB sunt astfel încât $m(\measuredangle ACL) = m(\measuredangle LCB)$ iar CH este perpendiculară pe AB.

a) Pentru orice punct X (diferit de C) pe dreapta CL demonstraţi că $m(\measuredangle XAC) \neq m(\measuredangle XBC)$.

b) Pentru orice punct Y (diferit de C) pe dreapta CH demonstraţi că $m(\measuredangle YAC) \neq m(\measuredangle YBC)$.

Bulgaria

3. Fie ABC un triunghi echilateral şi D, E puncte arbitrare pe laturile $[AB]$, respectiv $[AC]$. Dacă DF, EG (cu $F \in AE$, $G \in AD$) sunt bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ADE, demonstraţi că suma ariilor triunghiurilor DEF şi DEG este cel mult egală cu aria triunghiului ABC. Explicaţi când are loc egalitatea.

Grecia

4. Un poligon convex cu 1415 laturi are perimetrul egal cu 2001 cm. Demonstraţi că există trei vârfuri ale poligonului încât triunghiul ce îl determină să aibă aria mai mică decât 1 cm^2.

Iugoslavia

* * *

1. Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $a \leq b \leq c$. Evident, avem $1^3 + 10^3 + 10^3 = 2001$. Vom arăta că $(1, 10, 10)$ este singura tripletă ce verifică relaţia din enunţ.

În acest scop, vom utiliza rezultatul următor: *oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, restul împărţirii lui n^3 la 9 este 0, 1 sau -1 (în loc de 8)*. Într-adevăr, dacă $n = 3k$, atunci $9 \mid n^3$ şi dacă $n = 3k \pm 1$ atunci $n^3 = \mathcal{M}9 \pm 1$.

Fie (a, b, c) o soluţie a ecuaţiei din enunţ. Ţinând seama de acest rezultat şi de faptul că $3 \mid 2001$ şi $2001 = \mathcal{M}9 + 3$, rezultă că $a^3 = \mathcal{M}9 + 1$, $b^3 = \mathcal{M}9 + 1$ şi $c^3 = \mathcal{M}9 + 1$, deci $a = 3m + 1$, $b = 3n + 1$, $c = 3p + 1$, $m, n, p \in \mathbb{N}$. Avem:

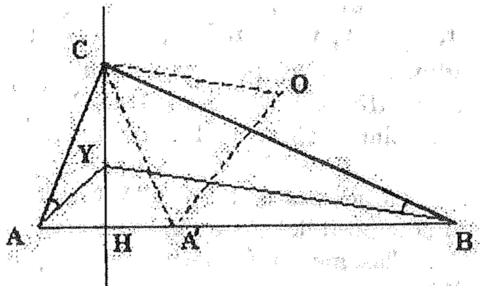
$$(27m^3 + 27m^2 + 9m + 1) + (27n^3 + 27n^2 + 9n + 1) + (27p^3 + 27p^2 + 9p + 1) = 2001 \Rightarrow$$

$$(3m^3 + 3m^2 + m) + (3n^3 + 3n^2 + n) + (3p^3 + 3p^2 + p) = 222 \quad .$$

Deoarece $3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 4 = 244 > 222$, deducem că $0 \leq m, n, p \leq 3$. Prima paranteză poate lua valorile: $m = 0 \Rightarrow 3m^3 + 3m^2 + m = 0$, $m = 1 \Rightarrow 3m^3 + 3m^2 + m = 7$, $m = 2 \Rightarrow 3m^3 + 3m^2 + m = 38$ şi $m = 3 \Rightarrow 3m^3 + 3m^2 + m = 111$. Similar pentru celelalte două paranteze. Suma parantezelor poate fi 222 pentru $m = 0$, $n = p = 3$ şi vom obţine $a = 1$, $b = c = 10$.

2. a) Presupunem că pentru un punct $X \in CL$, $X \neq C$, am avea $m(\widehat{XAC}) = m(\widehat{XBC})$. Obţinem atunci că $\Delta AXC \equiv \Delta BXC$. Deci, segmentele AC şi BC sunt congruente, în contradicţie cu $AC \neq BC$.

b) Presupunem că există $Y \in CH$, $Y \neq C$, astfel încât $m(\widehat{YAC}) = m(\widehat{YBC})$. Atunci cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ circumscrise triunghiurile AYC şi respectiv BYC sunt congruente. Dacă A' este simetricul punctului A în raport cu dreapta CH, atunci A' se află pe $\mathcal{C}_2$. Evident, A' se află de asemenea pe dreapta AB. Avem: $m(\widehat{HCA'}) = m(\widehat{HCA}) = m(\widehat{ABC})$.



Fie O centrul cercului $\mathcal{C}_2$. Are loc: $m(\widehat{COA'}) = 2m(\widehat{CBA'}) = 2m(\widehat{ABC})$. Pe de altă parte, în triunghiul isoscel $OA'C$ avem: $2m(\widehat{A'CO}) = 180^\circ - m(\widehat{COA'}) = 180^\circ - 2m(\widehat{ABC})$. Obţinem relaţia: $m(\widehat{A'CO}) = 90^\circ - m(\widehat{ABC})$.

Ca urmare, $m(\widehat{HCO}) = m(\widehat{HCA'}) + m(\widehat{A'CO}) = m(\widehat{ABC}) + \left(90^\circ - m(\widehat{ABC})\right) = 90^\circ$. Rezultă că $CY \perp OC$, adică CY este tangentă în C la cercul $\mathcal{C}_2$ şi, deci, Y coincide cu C, absurd.

Pentru alte poziţii ale lui Y pe CH, se adaptează raţionamentul precedent.

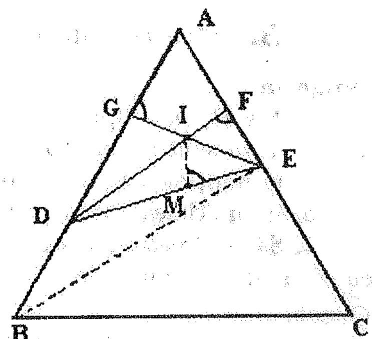
3. Utilizând teorema unghiului exterior, obţinem:

$$m(\widehat{AGE}) = m(\widehat{ADE}) + m(\widehat{GEO}) = m(\widehat{ADE}) + \frac{1}{2}\left[180^\circ - m(\widehat{A}) - m(\widehat{ADE})\right] = 60^\circ + \frac{1}{2}m(\widehat{ADE})$$

şi

$$m(\widehat{DFE}) = m(\widehat{ADF}) + m(\widehat{A}) = 60^\circ + \frac{1}{2}m(\widehat{ADE});$$

deci $\widehat{AGE} \equiv \widehat{DFE}$ (1).



Fie $M \in (DE)$ astfel încât $\widehat{DIM} \equiv \widehat{DIG}$. Din $\Delta DIM \equiv \Delta DIG$ deducem $DM = DG$ (2) şi $\widehat{DMI} \equiv \widehat{DGI}$ (3). Din (1) şi (3) rezultă că $\widehat{IME} \equiv \widehat{IFE}$. În consecinţă, avem $\Delta IME \equiv \Delta IFE$, deci $ME = FE$ (4). Relaţiile (2) şi (4) implică egalitatea $DE = DG + EF$ (5). Fie ρ raza cercului înscris în triunghiul ADE. Atunci, ţinând seama de (5), avem $S_{\Delta IDG} + S_{\Delta IEF} = \frac{\rho}{2}(DG + EF) = \frac{1}{2}\rho \cdot DE = S_{\Delta IDE}$, de unde $S_{\Delta DEG} + S_{\Delta DEF} = 3S_{\Delta IDE}$ (6).

Se ştie că, dacă M este un punct pe arcul subîntins de o coardă XY, atunci aria triunghiului MXY este maximă când M este mijlocului arcului $\overset{\frown}{XY}$. Ca urmare, avem $S_{\Delta IDE} \leq S_{\Delta PDE}$, unde ΔPDE este isoscel cu $m(\widehat{DPE}) = m(\widehat{DIE}) = 120^\circ$. Notând cu O centrul triunghiului echilateral dat, avem $\Delta PDE \sim \Delta OBC$ şi, deci, $S_{\Delta PDE} \leq S_{\Delta OBC}$ cu egalitate dacă şi numai dacă punctul D coincide cu B şi punctul E cu C. Aşadar, are loc $S_{\Delta IDE} \leq S_{\Delta OBC}$ (7). Din (6) şi (7), obţinem în final $S_{\Delta DEG} + S_{\Delta DEF} \leq 3S_{\Delta OBC} = S_{\Delta ABC}$, adică inegalitatea dorită. Avem egalitate dacă şi numai dacă D cade în B şi E în C.

4. Fie $A_1A_2...A_{1414}A_{1415}$ poligonul dat. Observăm că există 1415 triunghiuri determinate de trei vârfuri succesive: $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, ..., $A_{1414}A_{1415}A_1$, $A_{1415}A_1A_2$. Să presupunem că fiecare dintre acestea are aria ≥ 1. Vom utiliza următorul rezultat: dacă un triunghi are două laturi egale cu a şi b, atunci $2S \leq ab$ (căci $2S = ah_a \leq ab$). Obţinem inegalităţile: $A_1A_2 \cdot A_2A_3 \geq 2$, $A_2A_3 \cdot A_3A_4 \geq 2$, ..., $A_{1415}A_1 \cdot A_1A_2 \geq 2$. Din acestea şi prin utilizarea inegalităţii mediilor, suntem conduşi la următoarele: $A_1A_2 + A_2A_3 \geq 2\sqrt{2}$, $A_2A_3 + A_3A_4 \geq 2\sqrt{2}$, ..., $A_{1415}A_1 + A_1A_2 \geq 2\sqrt{2}$. Prin adunare, pentru perimetrul P al poligonului dat vom avea: $2P \geq 1415 \cdot 2\sqrt{2}$ sau $P \geq 1415 \cdot \sqrt{2}$. Dar $\sqrt{2} \approx 1,4142$, astfel încât $P \geq 2001,093$ şi, deci, $P > 2001$. În consecinţă, măcar unul dintre aceste 1415 triunghiuri are aria mai mică decât 1.

La această ediţie a OBMJ, *echipa României* a acumulat 193 puncte (din 240 puncte posibile) şi s-a clasat pe *locul al doilea.*

Clasamentul (neoficial) pe ţări şi punctajele obţinute: *Bulgaria* (205), *România* (193), *Grecia* (169), *Macedonia* (118), *Iugoslavia* (109), *R. Moldova* (84), *Cipru* (59), *Albania* (42). Nu a participat *echipa Turciei.*

Componenţa echipei noastre şi rezultatele obţinute: ***Andrei NEGUŢ*** (40) - medalie de aur, ***Gabriel KREINDLER*** (35) - medalie de aur, ***Narcisa BÂNDĂ*** (32) - medalie de argint, ***Alexandru POPA*** (30) - medalie de argint, ***Dragoş MICHNEA*** (29) - medalie de argint şi ***Irina MANEA*** (27) - medalie de argint.

Însoţitorii echipei: prof. univ. dr. *Dan Brânzei* şi prof. *Dinu Şerbănescu.*

B. Alte probleme propuse juriului pentru selectare

Bulgaria

1. Fie P_n ($n = 3, 4, 5, 6, 7$) mulţimea întregilor pozitivi de forma $n^k + n^l + n^m$, unde k, l, m sunt întregi pozitivi. Să se afle n astfel încât:

a) în mulţimea P_n există o infinitate de pătrate perfecte;

b) în mulţimea P_n nu există nici un pătrat perfect.

2. Să se găsească toate numerele de trei cifre $\overline{abc}$ astfel încât numărul $\overline{abcabcabc...abc}$ cu 6003 cifre ($\overline{abc}$ luat de 2001 ori) să fie divizibil cu 91.

Grecia

3. Discriminantul ecuaţiei $x^2 - ax + b = 0$ este pătratul unui număr raţional, iar a şi b sunt întregi. Să se arate că rădăcinile ecuaţiei sunt numere întregi.

4. Să se găsească numărul natural n, care nu se divide cu 3 şi pentru care 2^{n^2-10} este cubul unui număr prim.

5. În patrulaterul convex $ABCD$, $AB = CD$ şi $m(\widehat{BAC}) = 30°$. Dacă $m(\widehat{ADC}) = 150°$, să se arate că $\widehat{BCA} \equiv \widehat{ACD}$.

6. Se dă triunghiul ABC, cu $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $\widehat{B} \neq \widehat{C}$. Cercul (O, R), în care BC este coardă, taie laturile AB, AC în punctele D şi respectiv E. Fie S piciorul înălţimii duse din A pe latura BC şi fie K punctul în care această înălţime taie segmentul DE. Dacă M este mijlocul lui BC, să se arate că patrulaterul $AKOM$ este paralelogram.

Iugoslavia

7. Să se afle numerele întregi x şi y astfel încât $x^3 \pm y^3 = 2001p$, unde p este număr prim.

Macedonia

8. Să se arate că nu există întregi pozitivi x şi y, astfel încât $x^5 + y^5 + 1 = (x+2)^5 + (y-3)^5$.

9. Să se arate că într-un plan dat nu există nici un triunghi echilateral ABC ale cărui vârfuri A, B şi C să aibă coordonate întregi relativ la un sistem cartezian ortogonal.

România

10. Într-o sală sunt n matematicieni. Fiecare dintre ei cunoaşte exact k matematicieni. Care este valoarea minimă a lui k pentru a fi siguri că există cel puţin 3 matematicieni încât fiecare să-i cunoască pe ceilalţi doi.

Valentin Vornicu, elev, Col. Naţ. "Mihai Viteazu", Bucureşti

11. În triunghiul ABC, $AB = AC$, $D \in BC$, $AD \perp BC$, $E \in AB$, $m(\sphericalangle ACE) = m(\sphericalangle ECB) = 18°$. Dacă $AD = 3$ cm, spuneţi care este lungimea segmentuluii CE.

Sorin Peligrad, Piteşti

12. Fie $x_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, $n \geq 10$, $A = x_1 + ... + x_{n-1}$, $B = A + x_n$. Demonstraţi că între A şi B există cel puţin un pătrat perfect.

Vasile Zidaru şi Mircea Lascu

13. Fie $\mathcal{C}(O,R)$ cercul circumscris triunghiului ABC. Vârfului A îi asociem cele două cercuri tangente semidreptelor $(AB$, $(AC$ şi cercului $\mathcal{C}$ şi raportul $\alpha < 1$ al razelor lor. Analog, asociem lui B, C rapoartele $\beta < 1$, $\gamma < 1$. Demonstraţi că $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Dan Brânzei

C. Barajele pentru selectarea lotului JBMO 2001

Baraj 1, 12 aprilie 2001, Târgu Mureş

1. Fie triunghiul ABC. Un cerc care trece prin B şi C intersectează dreptele AB şi AC în D şi, respectiv, E. Proiecţiile punctelor B şi E pe CD sunt B' şi, respectiv, E'. Proiecţiile punctelor D şi C pe BE sunt D' şi, respectiv, C'. Demonstraţi că punctele B', D', E' şi C' se află pe acelaşi cerc.

Dan Brânzei

2. Să se determine $n \in \mathbf{Z}$ astfel încât numărul $\sqrt{\dfrac{4n-2}{n+5}}$ să fie raţional.

Dan Popescu

3. În interiorul unui cerc cu centrul O se consideră 1200 de puncte A_1, A_2, ..., A_{1200}, astfel încât oricare ar fi i, j cu $1 \leq i \leq j \leq 1200$, punctele O, A_i şi A_j nu sunt coliniare. Să se arate că există punctele M şi N pe cerc cu $m(\sphericalangle MON) = 30°$ astfel încât în interiorul unghiului $\sphericalangle MON$ să se afle exact 100 de puncte.

***

4. Trei elevi scriu pe rând câte un număr de 2 cifre pătrat perfect. La sfârşit, ei constată că numărul de 6 cifre astfel obţinut este de asemenea un pătrat perfect. Ce număr au obţinut elevii?

Mircea Becheanu

Baraj 2, 19 mai 2001, Buzău

1. Fie dreptunghiul $ABCD$ şi punctele $E \in CA$, $F \in AB$, $G \in BC$ astfel încât $DE \perp CA$, $EF \perp AB$, $EG \perp BC$. Să se rezolve în $\mathbf{Q}$ ecuaţia: $AC^x = EF^x + EG^x$.

Dan Brânzei

2. Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbf{R}$ cu proprietatea că pentru orice numere reale x, y, dacă are loc $x+y \in A$, atunci are loc şi $xy \in A$. Să se demonstreze că $A = \mathbf{R}$.

Eugen Păltănea

3. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul $\mathcal{O}$. Unui punct $E \in \mathcal{O}$ i se asociază proiecţiile K, L, M, N pe dreptele DA, AB, BC, CD. Dacă N este ortocentrul triunghiului KLM pentru un punct E distinct de A, B, C, D, atunci aceasta are loc pentru orice punct E al cercului $\mathcal{O}$.

Dan Brânzei

4. Să se determine numerele naturale nenule $a < b < c < d$ cu proprietatea că oricare dintre acestea divide suma celorlalte trei.

Dinu Şerbănescu

Baraj 3, 20 mai 2001, Buzău

1. Fie n un număr natural. Să se afle numerele naturale a, b, c, d pentru care $a^2+b^2+c^2+d^2 = 7\cdot 4^n$.

Laurenţiu Panaitopol

2. Fie $ABCDEF$ un hexagon cu $AB||DE$, $BC||EF$, $CD||FA$ şi având diagonalele AD, BE şi CF congruente. Să se arate că hexagonul este inscriptibil.

Dan Brânzei

3. Se consideră $n \geq 2$ un număr natural. Să se determine numerele naturale x astfel încât $\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}} < n$, oricare ar fi numărul de radicali.

Ion Dobrotă

4. Să se determine un paralelipiped dreptunghic de arie minimă, ştiind că are volumul mai mare strict decât 1000, iar lungimile muchiilor sunt numere naturale.

Dinu Şerbănescu

Concurs de matematică pentru clasa a IV-a
Iaşi, 19 mai 2001

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 10 puncte.

1. Aflaţi x din egalitatea $10\cdot\{x - 10\cdot[36+10\cdot(24+24:4)]\} = 100$.

2. Fie numărul $a = 122333444455555\ldots 2020\ldots 20$.

a) Câte cifre are numărul a?

b) Precizaţi cifra de pe locul 50.

3. Alina are de rezolvat un anumit număr de probleme. Dacă ar rezolva câte 8 probleme pe zi le-ar termina într-un anumit număr de zile. Ea rezolvă însă câte 10 probleme pe zi şi termină cu 3 zile mai devreme. Câte probleme a avut de rezolvat Alina?

4. Un om urcă un şir de trepte ale unei scări după regula: urcă 3 trepte, coboară două trepte, urcă din nou 5 trepte şi coboară o treaptă.

a) Pe ce treaptă se află omul după 736 de paşi?

b) După câţi paşi ajunge el pe treapta 736?

(Un pas înseamnă urcarea sau coborârea unei trepte)

5. Să se determine toate numerele de forma $\overline{xy}$ ştiind că $48\cdot\overline{xy} = \overline{3ab4}$.