(*Lic.* "*C. Negruzzi*"), Coşbuc Mircea (*Lic. Naţional*), Apetrii Bogdan (*Şc. Nr. 22* "*B. P. Haşdeu*"), Murariu Gabriel (*Şc. Nr. 24* "*Ion Ghica*") - menţiune.

Clasa a VI-a: Vâlcu Ruxandra (*Lic. Naţional*) - premiul I; Juncu Sandra (*Lic.* "*C. Negruzzi*") - premiul II; Răşcanu Andreea (*Şc. Nr. 39* "*G. Călinescu*") - premiul III; Ursu Corina (*Lic.* "*Al. I. Cuza*"), Zanoschi Iulia (*Lic. Naţional*), Zanoschi Delia (*Lic. Naţional*), Toader Ionuţ (*Lic.* "*C. Negruzzi*"), Dranca Vlad-Ionuţ (*Şc.* "*B. P. Haşdeu*"), Damian Emilian (*Lic. de informatică*), Călin Ramona (*Lic. Naţional*), Butnaru Cătălin (*Şc. Nr. 3* "*Al. Vlăhuţă*"), Airinei Adrian (*Lic.* "*C. Negruzzi*"), Acostoaie Andreea (*Lic.* "*C. Negruzzi*") - menţiune.

Clasa a VII-a: Popovici George (*Lic.* "*C. Negruzzi*") - premiul I; Pripasu Andrei (*Lic.* "*Emil Racoviţă*") - premiul II; Giantâc Ramona (*Lic.* "*V. Alecsandri*") - premiul III; Dohotaru Alina-Ioana (*Lic.* "*Miron Costin*"), Florea Răzvan (*Şc. Nr. 10* "*Gh. I. Brătianu*"), Radu Irina (*Lic.* "*M. Sadoveanu*", *Paşcani*) - menţiune.

Clasa a VIII-a: Airinei Ioana (*Şc.* "*N. Iorga*") - premiul I; Onu Mădălin (*Lic. Naţional*) - premiul II; Mocanu Tiberiu (*Lic.* "*Miron Costin*") - premiul III; Ştefănescu Cristian (*Lic.* "*M. Sadoveanu*", *Paşcani*), Sărbuşcă Alexandru (*Şc. nr. 22* "*B. P. Haşdeu*"), Călin Smaranda (*Lic.* "*C. Negruzzi*") - menţiune.

Concursul "Adolf Haimovici", ediţia a V-a

- pentru liceele economice, industriale şi agricole -

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore. (Observaţii valabile pentru ambele faze ale concursului şi toate clasele.)

Faza judeţeană, 17 februarie 2001

<u>Clasa a IX-a</u>

1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (-\infty, -2) \\ -x+a, & \text{dacă } x \in [-2, 0] \\ bx + c, & \text{dacă } x \in (0, \infty) \end{cases}$

a) Să se determine a, b, c ştiind că $A(-1, -3)$, $B(1, -2)$, $C(0.5, -3)$ sunt puncte situate pe graficul funcţiei.

b) Pentru a, b, c determinate la punctul **a**, să se reprezinte grafic funcţia.

c) Să se rezolve inecuaţia $f(x) \leq 2$.

2. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$.

3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \dfrac{5}{x-1} - \dfrac{6}{1-y} = 4 \\ \dfrac{7}{x-1} + \dfrac{4}{y-1} = \dfrac{17}{5}. \end{cases}$

<u>Clasa a X-a</u>

1. Rezolvaţi ecuaţia $5^x + 12^x = 13^x$ folosind monotonia funcţiei exponenţiale.

2. Calculaţi $S_n = \dfrac{1}{\log_2 1 + \log_2 2 + \ldots + \log_2 n} + \dfrac{1}{\log_3 1 + \log_3 2 + \ldots + \log_3 n} +$
$+ \ldots + \dfrac{1}{\log_n 1 + \log_n 2 + \ldots + \log_n n}$

3. Pentru ce valori ale parametrilor $m, p \in \mathbf{N}$, numărul $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m + \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^p \in \mathbf{R}$?

Clasa a XI-a

1. Se consideră determinantul $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$.

a) Rezolvaţi ecuaţia $f(x) = 0$;

b) Pentru $g(x) = \dfrac{f(x)}{(x-a)(x+3a)^3}$, calculaţi limitele: $\lim\limits_{x \to -3a} g(x)$; $\lim\limits_{x \to \infty} [g(x)]^{x+3a}$.

2. Se consideră şirurile $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$, definite prin: $a_0 = 2$, $a_n - 2a_{n+1} = 2n + 3$, $\forall n \in \mathbf{N}$; $b_n = a_n + 2n - 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

a) Arătaţi că $(b_n)_{n \geq 0}$ este o progresie geometrică.

b) Să se arate că $a_n = \dfrac{1}{2^n} - 2n + 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

c) Calculaţi $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

d) Cercetaţi existenţa limitelor şirurilor $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}, (c_n)_{n \geq 0}$.

3. a) Să se rezolve ecuaţia $A^n \cdot X = B$, $n \in \mathbf{N}$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Fie $A, B \in M_n(\mathbf{C})$. Să se arate că: $(A+B) \cdot A^* \cdot (A-B) = (A-B) \cdot A^* \cdot (A+B)$, unde A^* este adjuncta lui A, iar A este inversabilă.

Clasa a XII-a

1. Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că $(\mathbf{R}, *)$ este grup abelian.

b) Să se rezolve ecuaţia $x * 2 = 0$.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$, $x \in \mathbf{R}$.

3. Fie $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}^* \right\}$.

a) Să se arate că $(M, *)$ este grup abelian, unde eticheta "$*$" reprezintă înmulţirea matricelor.

b) Să se arate că $(\mathbf{R}_+^*, \cdot) \cong (M, *)$.

c) Să se scrie $A(x)$ sub forma $A(x) = M + x * N$, unde M şi N sunt matrice ce nu conţin necunoscuta x.

d) Să se calculeze $A^n(x)$ (puterea a n-a a matricei $A(x)$), $n \geq 1$.

Premiile acordate:

Clasa a IX-a: Zberea Monica Gabriela (Lic.Ec.Nr.1) - premiul I; Rotaru Nina (Gr.Şc. "Victoria") - premiul II; Irimia Bianca Elena (Gr.Şc."C.Brâncuşi") - premiul III; Taşcă Radu Dumitru (Gr.Şc."CFR Iaşi") - menţiune.

Clasa a X-a: Butnaru Roxana (Lic.Ec.Nr.1) - premiul I; Iftenie Irina (Gr.Şc."Şt. Procopiu") - premiul II; Chitic Ana Maria (Lic.Ec.Nr.1) - premiul III; Nechita Mariana Dana (Gr.Şc."CFR Iaşi") - menţiune.

Clasa a XI-a: Stoicanu Radu (Lic.Ec.Nr.1) - premiul I; Timofte Adrian (Gr.Şc. "Şt. Procopiu") - premiul II; Borşanu Sorin Constantin (Gr.Şc."Energetic") - premiul III; Condurachi Ionela (Lic.Ec.Nr.1) - menţiune.

Clasa a XII-a: Rusu Stelian (Gr.Şc."Tehnoton") - premiul I; Miron Ciprian Costel (Gr.Şc."Şt.Procopiu") - premiul II; Spânu Paul (Gr.Şc."Şt.Procopiu") - premiul III; Nistor Ana Maria (Gr.Şc."C.Brâncuşi") - menţiune.

Faza interjudeţeană, Iaşi, 12 mai 2001

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ şi fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$af(x+2) + bf(2-x) = 6x + 25,\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

a) Să se determine a şi b ştiind că punctele $A(1,3)$ şi $B(3,7)$ se află pe graficul funcţiei.

b) Să se determine funcţia f pentru $a = 4$ şi $b = 1$.

c) Dacă $f(x) = 2x + 1$, să se calculeze suma

$$S_n = f(1)f(2) + f(2)f(3) + \ldots + f(n)f(n+1),\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

2. Fie funcţia $f(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$, definită pe $[a,b]$, $a < b$.

a) Să se arate că f este crescătoare pe $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ şi descrescătoare pe $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

b) Să se găsească extremele funcţiei f.

3. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât $f(x+1) \leq x^2 \leq f(x) + 2x - 1, \forall x \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine f.

b) Să se arate că $\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \ldots + \frac{1}{f(2001)} < \frac{3999}{2000}$.

Clasa a X-a

1. Să se rezolve: **a)** $x^{\log_{\sqrt[4]{x}}(x-1)} = 16$ şi **b)** $|\log_3 |x|| < 1$.

2. Se dă ecuaţia $x^3 - 3x^2 + m = 0$, $m \in \mathbf{R}$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 > x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

b) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia să aibă rădăcină dublă nenulă.

c) Pentru $m = -1$, ecuaţia are o singură rădăcină reală.

3. Fie ecuaţia $z^2 - az + b^2 = 0$, $a, b \in \mathbf{C}^*$ cu rădăcinile z_1, z_2. Să se demonstreze că dacă $\frac{a}{b} \in \mathbf{R}$, atunci $|z_1| = |z_2|$ sau $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbf{R}$.

Clasa a XI-a

1. Se dau matricile $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ u & v\end{pmatrix}$.

a) Să se determine u şi v astfel încât $AX=XA$.

b) Să se calculeze A^n, $n\in\mathbf{N}^*$.

c) Să se calculeze $A+A^2+\ldots+A^n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_1=0$ şi

$$x_{n+1}=2x_n+1+\sqrt{3x_n^2+6x_n+1},\ \forall n\geq 1.$$

a) Să se arate că $x_n\in\mathbf{N}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

b) Determinaţi limita şirului $(y_n)_{n\geq 0}$, $y_n=\sqrt{3x_n^2+6x_n+1}-\sqrt{3}x_n$.

3. Determinaţi $a\in\mathbf{R}$ astfel încât polinomul $P(x)=x^4+ax^3+28x^2+48x+64$ să aibă o rădăcină raţională dublă.

Clasa a XII-a

1. Să se calculeze $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+n}dx$, unde $n\in\mathbf{N}$ (discuţie).

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\pi}(x+1)\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx$.

3. Se dă mulţimea $G=(2,+\infty)$ şi legea de compoziţie $x*y=xy-2x-2y+6$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$.

a) Să se arate că G este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu legea '$*$'.

b) Să se arate că $(G,*)$ este grup abelian.

c) Calculaţi $x^{(n)}=\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n\text{ ori}}$ şi verificaţi prin inducţie rezultatul obţinut.

Premiile acordate:

Clasa a IX-a: Şuiu Andrei (Botoşani) - premiul I; Lemnaru Liliana (Focşani) - premiul II; Nechita Remus Andrei (Botoşani) - premiul III; Durca Rodion (Neamţ) - menţiune.

Clasa a X-a: Costaş Mihaela (Suceava) - premiul I; Nechita Mariana Dana (Iaşi) premiul II; Lucescu Alina (Suceava) - premiul III; Roşca Victor (Bacău) - menţiune.

Clasa a XI-a: Neagu Marius Valentin (Focşani) - premiul I; Andronic Irina (Focşani) - premiul II; Cojocaru Cătălina (Focşani) - premiul III; Cernat Ana Maria (Bacău) - menţiune.

Clasa a XII-a: Istina Marcel (Botoşani) - premiul I; Ciobanu Violeta (Suceava) - premuil II; Blănaru Ionuţ (Vaslui) - premiul III; Antăloae Ciprian (Neamţ) - menţiune.

Amuzament matematic

Ştiaţi că $35-5321=5784$? Iată "demonstraţia":

$$\begin{array}{cccc}X & X & X & V\ -\\ 5 & 3 & 2 & 1\\ \hline 5 & 7 & 8 & 4\end{array}$$

Alexandra AONOFRIESEI

cl. a IV-a, Şcoala "George Coşbuc", Iaşi