Concursul interjudeţean ,,Speranţe Olimpice”
Ediţia a XVII-a, Paşcani, 4 noiembrie 2017

Clasa a III-a

1. a) Determinaţi suma tuturor numerelor de forma $\overline{a0b}$, cu $a < b \le 5$.

b) Câţi de + are adunarea $7 + 7 + 7 + ... + 7 = 427$?

2. a) Maria şi Ioana au împreună 16 mere, Vlad şi Ioana au împreună 20 de mere, iar Vlad şi Maria au împreună 26 de mere. Câte mere are fiecare?

b) Calculaţi diferenţa dintre suma numerelor impare cuprinse între 18 şi 40 şi suma numerelor pare cuprinse între 11 şi 35.

3. a) Câte numere de trei cifre distincte $\overline{abc}$ verifică condiţia $c = a + b$?

b) Suma a trei numere naturale este 180. Numărul cu 51 mai mic decât primul număr, numărul cu 31 mai mic decât al doilea şi numărul cu 26 mai mic decât al treilea sunt trei numere consecutive. Aflaţi numerele.

Clasa a IV-a

1. a) Aflaţi numărul natural a, dacă $\{[(a - 2) : 3] : 5 + 19\} : 7 - 1 = 6$.

b) În 2017, bunicul şi bunica au vârstele de 81 ani şi, respectiv, 75 de ani. În ce an aveau, împreună, un secol?

c) Suma dintre treimea unui număr şi sfertul său este 70. Aflaţi triplul numărului.

2. a) Aranjaţi în ordine descrescătoare numerele: $\overline{m973p}$, $\overline{a12}$, 3489, $\overline{a21}$ şi $\overline{4amp}$.

b) Scrieţi numerele naturale x, y, z, t în ordine crescătoare, dacă $x + 5 = y - 9 = z + 11 = t - 13$.

3. a) Determinaţi numerele naturale x şi y, dacă $13 : y$ este număr natural şi $(3x + 2) \cdot (4 + 13 : y) = 850$.

b) Arătaţi că, oricum am alege cinci numere naturale cuprinse între 10 şi 29 inclusiv, există două dintre ele astfel încât diferenţa lor este cel mult egală cu 4.

Clasa a V-a

1. a) Comparaţi numerele 10^4, 10^3 şi 2^{10}.

b) Arătaţi că 2^{10^4} are cel puţin 3001 cifre şi cel mult 4000 cifre.

2. a) Fie a, b, c, d numerele naturale nenule. Arătaţi că $2 + (a + 1) + (b + 3) + (c + 7) + (d + 15) \ge 2^5$.

b) Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c, d ştiind că $(a+1)(b+3)(c+7)(d+15) \le 2^{10}$.

3. Se numeşte *număr interesant* un număr natural n al cărui pătrat se poate scrie ca sumă de n numere consecutive. Verificaţi dacă 13 şi 16 sunt numere interesante.

b) Arătaţi că produsul a oricare două numere interesante este tot număr interesant.

Clasa a VI-a

1. Se consideră mulţimea $A = \{p^2 \mid p \text{ este număr prim}\}$.

a) Arătaţi că un număr format din 2017 cifre, dintre care 1000 de cifre egale cu 5, 1000 de cifre egale cu 4, 17 cifre egale cu 9, nu este element al mulţimii A.

b) Arătaţi că, oricum am alege patru numere diferite de 9 din mulţimea A, cel puţin două dintre acestea au diferenţa divizibilă cu 9.

2. a) Determinaţi numerele naturale x şi y, ştiind că $2xy = 2019 - 2x + y$.

b) Arătaţi că, dacă $a_1, a_2, ..., a_{2017}$ sunt numere nedivizibile cu 5, atunci numărul $N = a_1^4 + a_2^4 + ... + a_{2017}^4$ nu poate fi pătrat perfect.

3. a) Determinaţi numerele naturale nenule a şi b, dacă $\dfrac{[a,b] + 2a + 6b}{[a,b] + 3a + 7b} = \dfrac{7}{9}$.

b) Arătaţi că nu există $a, b \in \mathbb{N}^\star$, $a \neq 1$, pentru care $\dfrac{a}{[a,b] - b} = \dfrac{b}{(a,b) + a}$.

Clasa a VII-a

1. a) Determinaţi $\overline{abc}$, ştiind că $\dfrac{\overline{ab} + \overline{ac}}{a} + \dfrac{\overline{bc} + \overline{ba}}{b} + \dfrac{\overline{ca} + \overline{cb}}{c} = 66$.

b) Fie x, y, z numere naturale distincte două câte două, mai mari decât 2. Arătaţi că $\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{y^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right) \geq \dfrac{4}{5}$.

2. Pentru un număr natural n, notăm cu $\sigma(n)$ suma divizorilor săi naturali. Determinaţi numerele naturale nenule a, b pentru care $\sigma(a) + \sigma(b) + \sigma(ab) = a + b + 9$.

3. Demonstraţi că diagonala unui trapez isoscel este mai lungă decât linia mijlocie a acestuia.

Clasa a VIII-a

1. a) Se dau numerele reale x şi y astfel încât $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$. Arătaţi că $xy - 3x + y \in [-1; 7]$.

b) Determinaţi numerele naturale n pentru care $16^n + 4^n + 3$ se poate scrie ca o sumă de două numere prime.

2. a) Fie $a_k = k^4 + 6k^3 + 13k^2 + 12k + 5$, $k \in \mathbb{N}$. Calculaţi $S = b_0 + b_1 + ... + b_{2015}$, unde $b_k = \dfrac{1}{[\sqrt{a_k}]}$, iar $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

b) Fie a, b, c dimensiunile unui paralelipiped deptunghic. Dacă $(a+1) = b+c, b(b+1) = c + a$ şi $c(c+1) = a + b$, atunci paralelipipedul este un cub.

3. Se dau punctele necoplanare O, A, B, C astfel încât $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ şi $OA + OB + OC = 2$. Dacă r_1, r_2, r_3 sunt razele cercurilor înscrise în triunghiurile OBC, OCA, respectiv OAB, demonstraţi că $r_1 + r_2 + r_3 \leq 2 - \sqrt{2}$.