Concursul interjudeţean „Speranţe Olimpice" Ediţia a XVI-a, Paşcani, 5 noiembrie 2016

Clasa a III-a

1. a) Aflaţi numărul a din egalitatea: $389 - 17 - 29 - a = 100$.

b) Care dintre următoarele numere poate fi suma a cinci numere consecutive impare: $80; 310; 402$?

c) Să se calculeze suma numerelor pare de forma $\overline{ab}$ în care a, b sunt cifre consecutive în ordine crescătoare.

Mihai Crăciun

2. a) Aflaţi numerele x, y ştiind că $x + y + \overline{xy} + \overline{yx} = \overline{x0y}$.

b) Este posibil să se grupeze numerele de la 91 la 121 (inclusiv) în două grupe astfel încât una să conţină numai numere pare şi cealaltă să conţină numai numere impare şi suma numerelor din fiecare grupă să fie aceeaşi?

Mihai Crăciun

3. a) Aflaţi suma a 7 numere consecutive ştiind că trei dintre ele sunt $100, 101, 102$.

b) Aşezaţi numerele $50, 150, 250, 350, 450, 550, 650, 750, 850$ în trei grupe astfel încât suma numerelor din fiecare grupă să fie aceeaşi.

c) Într-o urnă sunt bile. Triplăm numărul bilelor şi scoatem din cutie 17 bile, apoi triplăm numărul bilelor rămase şi iar scoatem 17 bile şi aşa mai departe. Putem goli cutia prin repetarea acestei operaţii?

Recreaţii Matematice, 2/2012

Clasa a IV-a

1. a) Aflaţi a dacă $88 - 70 \times [60 - 5 \times (132 : 4 - 63 : a) + 1] - 6 = 12$.

b) În urmă cu 11 ani, suma vârstelor surorilor lui Mihai era de 18 ani. Acum, suma vârstelor surorilor lui Mihai este de 73 ani. Câte surori are Mihai?

c) Suma a patru numere impare consecutive este 2016. Aflaţi numerele.

Mihai Crăciun

2. Se dă şirul $1, 14, 27, 40, \ldots$.

a) Completaţi şirul cu încă cinci termeni.

b) Stabiliţi dacă 2016 este termen al şirului.

c) Aflaţi al 2017-lea termen al şirului.

Mihai Crăciun

3. a) Determinaţi numerele $\overline{xy}$ cu proprietatea că $\overline{x3y} - \overline{y2x} = 109$.

b) Suma a trei numere a, b, c este 160. Dacă însumăm triplul lui a cu triplul lui b şi cu împătritul lui c, obţinem 500. Care sunt cele trei numere, dacă numărul c este diferenţa dintre a şi b?

c) Pentru un număr n natural nenul, notăm cu $S(n)$ suma cifrelor sale (de exemplu: $S(247) = 2 + 4 + 7 = 13$). Câte numere de forma $\overline{abc}$ îndeplinesc condiţia că $S(S(\overline{abc})) = 10$?

Recreaţii Matematice, 1/2014

Clasa a V-a

1. a) Scrieţi numărul 53 ca sumă de două pătrare perfecte şi numărul 281 ca sumă de trei pătrate perfecte.

b) Arataţi că, dacă n este număr natural par, atunci numărul $53^n \cdot 281^{n+1}$ se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte, iar dacă n este număr natural impar, atunci numărul $53^n \cdot 281^{n+1}$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

2. a) Este posibil ca, după înlocuirea steluţelor din relaţia $1 * 5 * 9 * 13 * 17 * \ldots * 2017 = 2016$ cu semnele + sau −, să obţinem o relaţie adevărată?

b) Pe tablă sunt scrise numerele $2, 1, 1, 7$. Ştergem de pe tablă oricare două numere şi scriem în locul lor succesorii acestora. Este posibil ca în urma mai multor operaţii de acest fel să obţinem patru numere egale?

3. a) Fie numărul $N = 63 + 63^2 + 63^3 + \ldots + 63^{2016}$. Aflaţi ultimele şase cifre ale numărului $5^6 \cdot N$.

b) Pe un ecran este scris numărul 1. După primul minut, după numărul iniţial se scrie un număr de 4 ori mai mare. Apoi, după fiecare minut, este scris numărul de patru ori mai mare decât suma tuturor numerelor dinaintea lui. Aflaţi după câte minute suma numerelor care au apărut pe ecran este 125^{10}.

Clasa a VI-a

1. Gasiţi numerele prime p, q, r, distincte, ştiind că

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{pqr} \in \mathbb{N}.$$

Gazeta Matematică, 11/2011

2. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c şi d pentru care $ad = bc, ab + cd = 50$ şi $a \leq c \leq b$.

Recreaţii Matematice, 1/2016

3. a) Determinaţi cifrele $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $a, b, d \geq 2$, cu proprietatea că relaţia $a \cdot \overline{bc} = \overline{def}$ nu are loc, dar dacă mărim cu 1 fiecare cifră, noua relaţie este adevărată, iar dacă micşoram cu 1 fiecare cifră obţinem o altă relaţie adevărată.

b) Dacă numerele naturale x, y, z verifică $x^2 + y^2 - 10z = 1$, atunci $10 \mid xy$.

Andrei Eckstein

Clasa a VII-a

1. a) Un număr raţional se numeşte „bun" dacă este de forma $\dfrac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Să se arate că orice număr bun se scrie ca produs de k numere bune.

Andrei Eckstein

b) Determinaţi numerele naturale nenule a şi b astfel încât $\dfrac{a-2016}{b}$ şi $\dfrac{b+1}{a-2016}$ să fie numere naturale.

2. a) Dacă a, b sunt numere reale mai mari decât 1 şi n este un număr natural nenul, arătaţi că $ab + \dfrac{1}{a^n b^n} > \dfrac{1}{a^{n-1}} + \dfrac{1}{b^{n-1}}$.

Recreaţii Matematice, 2/2015

b) Câte soluţii naturale are ecuaţia $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2016}$?

3. a) În interiorul dreptunghiului $ABCD$ se consideră punctul M astfel încât $m(\widehat{MBC}) = m(\widehat{MCB}) = 15°$. Ştiind că $AB = 2BC$, aflaţi $m(\widehat{AMD})$.

b) Se dă triunghiul ABC şi punctele $D, E \in (BC)$ astfel încât $AB = BD$ şi $AC = CE$. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi $AI = DE$, calculaţi $m(\widehat{BAC})$.

Clasa a VIII-a

1. a) Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, arătaţi că are loc inegalitatea:

$$\frac{a}{a + \min\left(a, \frac{b+c}{2}\right)} + \frac{b}{b + \min\left(b, \frac{c+a}{2}\right)} + \frac{c}{c + \min\left(c, \frac{a+b}{2}\right)} \geq \frac{3}{2}.$$

Traian Tămâian

b) Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$ astfel încât $ab(c+d) \geq (a+b)cd$ şi $ab+cd \geq (a+b)(c+d)$. Comparaţi numerele $a+b$ şi $c+d$.

Recreaţii Matematice, 1/2013

2. a) Rezolvaţi în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia:

$$3^x + 4^x + 5^x + 6^x + 7^x = y^2.$$

RMT, 1/2012

b) Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{3}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + ... + \sqrt{1 + \frac{1}{2015^2} + \frac{1}{2016^2}} = 2016 + x - \frac{1}{2016}.$$

3. a) Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, $\{O\} = AC \cap BD$. Punctul M este mijlocul lui VO, punctul N este mijlocul lui BM, iar $P \in (AO)$ astfel încât $AP = 3PO$. Arătaţi că $PN \parallel (VDC)$.

Gazeta Matematică, 1/2015

b) Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a şi $M \in [A'C]$ cu proprietatea că $\dfrac{MA'}{MC} = \dfrac{3}{2}$. Să se determine un punct $P \in [AA']$ astfel încât suma $PM + PC'$ să fie minimă şi să se afle lungimea segmentului PA'.

Petru Asaftei