Concursul interjudeţean ,,Speranţe Olimpice" Ediţia a XV-a, Paşcani, 7 noiembrie 2015

Clasa a III-a

1. a) Câte numere de două cifre nu sunt formate din cifre consecutive?

b) Dacă $a - 23 = b - 60 = c - 29 = b - c - 10$, aflaţi numerele a, b, c.

Mihai Crăciun

2. Un număr natural de trei cifre nenule se numeşte ,,simpatic" dacă diferenţa a două dintre cifrele sale este 8.

a) Daţi exemple de trei numere ,,simpatice" .

b) Câte numere ,,simpatice" sunt?

Mihaela Ciobanu

3. a) Se scoate o coală dintr-un ziar, pe care se găsesc paginile 12 şi 25. Câte pagini are ziarul?

b) Suma a două numere naturale x şi y este 194. Dacă ştergem una din cifrele lui x, se obţine y. Aflaţi numerele x şi y.

Mihai Crăciun

Clasa a IV-a

1. a) Aflaţi toate numerele de forma $\overline{abc}$ care verifică egalitatea $\overline{abc} - \overline{cba} = 396$.

Paula Catâru

b) Aflaţi cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 105.

2. a) Dacă 7 culegători culeg 7 mere în 7 secunde, câţi culegători vor culege 100 de mere în două minute?

b) Aflaţi numerele a, b, c, d dacă $a : b = b : c = c : d = 5$ şi $2a + 3b + 5c + 7d = 714$.

Mihai Crăciun

3. a) O treime din jumătatea sfertului unui număr este 4. Care este numărul?

b) Fiecare din cei 37 de elevi participanţi la un concurs de matematică, la clasa a IV-a, au obţinut cel puţin 5 puncte şi cel mult 10 puncte la final. Arătaţi că există şapte participanţi care au luat acelaşi număr de puncte.

Mihai Crăciun

Clasa a V-a

1. a) Aflaţi restul împărţirii numărului A la 30, unde $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2015}$.

b) Arătaţi că numărul A este pătrat perfect, unde $A = 3^{2n+3} \times 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \times 6^{2n+3}$, n număr natural.

2. a) Să se determine $\overline{abcd}$ pentru care are loc relaţia: $\overline{abcd} = a^{\overline{cc}} - a \times \overline{cd}$.

Ioana Iacob, Răzvan Ceucă

b) La începutul unei partide de fotbal, fiecare jucător al unei echipe strânge mâna cu toţi jucătorii echipei adverse, cât şi cu cei 5 arbitri. Apoi, cei 5 arbitri îşi strâng mâinile între ei. Ştiind că o echipă de fotbal este formată din 11 jucători, câte strângeri de mână au avut loc înaintea începerii meciului?

3. Se consideră tabloul:

$$\begin{array}{ccccc} & & 5 & & \\ & 10 & & 15 & \\ 20 & & 25 & & 30 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

a) Care este primul număr de pe al 2015-lea rând?
b) Pe ce rând se află al 2015-lea număr?

Selectate de *Mihail Frăsilă*

Clasa a VI-a

1. a) Fie $F = \dfrac{165}{231}$. Câte numere naturale sunt în mulţimea

$$A = \{F, 2F, 3F, \ldots, 2015F\}?$$

b) Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $7|2a + 3b$. Arătaţi că $7|4a^2 + 5b^2$.

Gazeta Matematică

2. a) Fie p un număr prim mai mare decât 6. Aflaţi ultima cifră a lui p^4.
b) Aflaţi numerele prime p şi q ştiind că $p^4 + q^4 = 29186$.

3. a) Determinaţi câtul şi restul împărţirii numărului 3^{103} la 4×3^{100}.
b) Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că dacă $2^x + 3^y = 2^y + 3^x$, atunci $x = y$.

Gazeta Matematică

Selectate de *Gheorghe Iacob* şi *Vasile Pricop*

Clasa a VII-a

1. a) Fie $a, b, c > 0$ numere distincte două câte două şi

$$x = \frac{a}{b+c},\ y = \frac{b}{c+a},\ z = \frac{c}{a+b};\quad x' = \frac{1}{b+c},\ y' = \frac{1}{c+a},\ z' = \frac{1}{a+b}.$$

Arătaţi că numerele $x - y, y - z, z - x$ sunt direct proporţionale cu numerele $x' - y', y' - z', z' - x'$.

Andrei Eckstein

b) Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{2015^2} < \frac{2014}{2015}.$$

2. a) Fie $a = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2013 \cdot 2014$. Demonstraţi că $2015|a$.

b) Fie numărul $A = 123\ldots9899$, obţinut scriind unul lângă altul, în ordine crescătoare, toate numerele naturale nenule cel mult egale cu 99.

i) Aflaţi suma cifrelor numărului A.

ii) Stabiliţi dacă A este pătrat perfect.

Maria Linţ

3. a) În ΔABC, M este mijlocul laturii $[BC]$, $AD \perp BC$, $D \in (BM)$, iar $\angle BAD \equiv \angle DAM \equiv \angle MAC$. Calculaţi măsurile unghiurilor ΔABC.

b) În dreptunghiul $ABCD$, $AB = 3\ BC$ şi $E \in (CD)$ este astfel încât $EC = BC$. Calculaţi $m(\widehat{AE, BD})$.

Selectate de *Adriana Anton* şi *Constantin Petrea*

Clasa a VIII-a

1. a) Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât $ab + bc + ca = 1$. Arătaţi că

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \in \mathbb{Q}.$$

b) i) Arătaţi că, oricare ar fi numerele reale a, b, c, avem:

$$|a+b| + |a+c| \geq |b-c|.$$

ii) Demonstraţi că, pentru orice număr real x, avem:

$$|x+1| + |x+2| + \ldots + |x+2014| \geq 1007^2.$$

2. a) Calculaţi partea întreagă a numărului:

$$\frac{1\left(1^2+1\right)}{1^3+1} + \frac{2\left(2^2+1\right)}{2^3+1} + \ldots + \frac{2015\left(2015^2+1\right)}{2015^3+1}.$$

b) Fie $p > 0$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-p, +\infty)$ astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Arătaţi că

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \geq -\frac{np^3}{4}.$$

3. a) Fie tetraedrul $SABC$ astfel incât $[SA] \equiv [SC]$ şi fie $D \in (SB)$. Bisectoarea unghiului $\angle ASB$ intersectează AD în M, iar bisectoarea unghiului $\angle BSC$ intersectează CD în N. Demonstraţi că $MN \parallel (ABC)$.

b) În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M, N şi respectiv P proiecţiile punctelor A, C şi respectiv B' pe diagonala $[BD']$. Să se arate că

$$\frac{D'M}{BM} + \frac{D'N}{BN} + \frac{D'P}{BP} \geq 6.$$

Selectate de *Claudia Popescu*