Concursul interjudeţean ,,Speranţe Olimpice"
Ediţia a XIV-a, Paşcani, 8 noiembrie 2014

Clasa a III-a

1. a) Ce număr natural este cu 64 mai mic decât rezultatul înmulţirii sale cu 9?

b) Diferenţa a două numere este 62. Dacă adunăm primul număr cu jumatatea celui de-al doilea număr obţinem 170. Aflaţi numerele. *Gazeta Matematică*

2. a) Determinaţi suma numerelor de forma $\overline{abc}$, ştiind că $b = a + c = 7$.

b) La ferma animalelor cresc porci, oi şi iepuri, în total 981 de capete.

Ştiind că 640 de animale nu sunt oi şi 558 nu sunt iepuri, aflaţi numărul de animale de fiecare fel. *Crăciun Mihai*

3. a) Într-o urnă sunt 10 bile numerotate de la 1 la 10. Se iau la întâmplare 6 bile. Să se arate că există printre ele două numere a căror sumă este mai mare decât 10.

b) În sala de lectură a colegiului sunt scaune cu trei picioare şi fotolii cu 4 picioare şi toate sunt ocupate de elevi. Dacă în total sunt 65 de picioare, aflaţi câţi elevi sunt în sala de lectură. *Crăciun Mihai*

Clasa a IV-a

1. a) Să se determine a dacă: $2014 = [9 + (a - 2012) : 3] \times 6 - 14$.

b) Un fermier are 53 de iepuri albi sau negri. Oricum am alege doi iepuri, cel puţin unul este negru. Câţi iepuri sunt albi şi câţi sunt negri? *Crăciun Mihai*

2. a) Aflaţi două numere care îndeplinesc condiţiile: suma lor este de 4 ori mai mare decât diferenţa lor şi suma lor adunată cu diferenţa lor este egală cu 200.

b) Planeta Venus este populată cu roboţi albi, galbeni, verzi şi roşii. Ei pot avea între 1 şi 4 braţe, iar numărul de antene este de la 5 la 16. Se alege un număr de roboţi pentru o misiune în spaţiu. Care este numărul minim de roboţi venusieni necesari misiunii spaţiale, pentru a fi siguri că avem 10 roboţi identici? *Crăciun Mihai*

3. a) Câte numere de la 1 la 900 nu conţin ciferele 2 sau 3?

b) Este posibil ca folosind o balanţă şi o masă marcată de 200 g să se extragă, prin numai două cântăriri, 850 g din 4 kg? *Crăciun Mihai*

Clasa a V-a

1. a) Determinaţi numărul $\overline{abc}$ cu proprietatea $7^a + 5^b + 4^c = 175$.

b) Un număr de cinci cifre se împarte la 5, din cât se scade 230, iar diferenţei i se şterge prima cifră 8, obţinându-se 160. Aflaţi numărul.

2. Fie $A = \overline{xxy} + \overline{yyx} + \overline{xyy} + \overline{yxx}$ şi $B = \overline{xyx} + \overline{yxy} + A$, unde $x \neq y$.

a) Arătaţi că nu există x şi y pentru care A sau B să fie pătrate perfecte.

b) Arătaţi că există a şi b numere naturale nenule astfel încât numărul $C = aA+bB$ să fie pătrat perfect. Determinaţi cel mai mic pătrat perfect C.

3. Doi matematicieni A şi B se întâlnesc în tren şi poartă următorul dialog:
A: - Dacă îmi amintesc bine, ai trei fete. Ce vârstă au azi?
B: - Produsul vârstelor lor este 36 şi suma lor exact data zilei de azi.
După un timp de gândire, A îi răspunde:
A: - Îmi pare rău, dar nu am toate datele neceare.
B: - Am uitat să-ţi spun că cea mai mică fiică este blondă.
A: - Acum pot să-ţi spun ce vârstă au fetele tale ...
B: - Răspunsul este corect.
Explicaţi cum a aflat matematicianul A vârsta fetelor.

Clasa a VI-a

1. a) Se consideră $A = \{1, 2, 3, \ldots, 51\}$ şi submulţimi ale ei cu 3 elemente în care suma a două elemente este egală cu al treilea element. Câte astfel de submulţimi are A?

b) Determinaţi numerele naturale x, y, z astfel încât $\dfrac{x^2+x}{2} + \dfrac{y^2-y}{2} = \dfrac{z+7}{z+3}$.

2. a) Verificaţi dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$ să fie pătrat perfect.

b) Valorile numerice ale distanţelor dintre punctele A, B, C sunt exprimate prin numere naturale prime distincte şi verifică egalitatea $AB \cdot BC + BC \cdot CA + CA \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 61$. Demonstraţi că aceste puncte sunt coliniare. *Săcăleanu Ioan*

3. a) Demonstraţi că, oricare ar fi n număr natural nenul, numărul $A = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ este divizibil cu 17.

b) Demonstraţi că suma cifrelor numărului $\overline{ab}$ este egală cu suma cifrelor numărului $5 \cdot \overline{ab}$ dacă şi numai dacă numărul $\overline{ab}$ se divide cu 9. *Gazeta Matematică*

Clasa a VII-a

1. a) Să se arate că $n^3 > n^2 + n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

b) Demonstraţi că $\dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2003^3} < \dfrac{3}{2}$.

2. a) Arătaţi că numărul $5^{3n} + 30 \cdot 2^{5n}$ este divizibil cu 31, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Determinaţi numerele naturale x, y, z ştiind că

$$\frac{2^{2x+y} - 11}{4^{2x} - 9} = \frac{2y+1}{3y+1} = \frac{z^2+1}{3z+1}.$$

3. a) Fie patrulaterul convex $ABCD$. Arătaţi că dacă măsurile unghiurilor A, B, C, D ale patrulaterului sunt direct proporţionale respectiv cu patru numere naturale consecutive, atunci patrulaterul este trapez.

b) Fie $ABCD$ un paralelogram, M mijlocul laturii $[AD]$ şi P proiecţia lui B pe CM. Demonstraţi că $AP = AB$.

Clasa a VIII-a

1. a) Fie a, b numere reale astfel încât $|a| \leq 1$ şi $|b| \leq 1$. Arătaţi că: $|a| \cdot \sqrt{1-b^2} + |b| \cdot \sqrt{1-a^2} \leq 1$.

b) Arătaţi că $\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right] + 1 \leq \left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

2. a) Determinaţi toate perechile (x, y) de numere întregi nenule pentru care $x^2 + y^2 = x + y + xy$.

b) Arătaţi că, dacă $a, b, c > 0$, atunci $\frac{a^4+2b^2c^2}{b+c} + \frac{b^4+2c^2a^2}{c+a} + \frac{c^4+2a^2b^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^3}{6}$.

Andrei Eckstein

3) Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ şi punctele $M \in (AD), P \in (AB)$ şi $N \in (AA_1)$. Se consideră d, dreapta de intersecţie a planelor (MNP) şi (DCC_1). Daca $u = m(\measuredangle(d, (ACC_1)))$, $v = m(\measuredangle ACB)$ şi $t = m(\measuredangle ANP)$, arătaţi că $\sin u = \cos v \cdot \sin t$.

Gazeta Matematică

ERATĂ

I. Prof. **N. Stanciu** atrage atenţia asupra unei erori apărute în articolul *Relaţii vectoriale între elementele unui triunghi - Marcel Chiriţă*, publicat în nr. 2/2014 al revistei pp. 109-111.

Relaţiile 4) din Propoziţia I trebuie înlocuite cu

$$\overrightarrow{m}_a \cdot \overrightarrow{a} = \frac{1}{2}(c^2 - b^2) \text{ şi analoagele.}$$

Într-adevăr, în stabilirea acestor relaţii (ultimele două rânduri de la p. 110), s-a strecurat o greşeală de *calcul* în ultimul rând; corect este

$$\frac{1}{4}(a^2 + 4m_a^2 - 4b^2) = \frac{1}{4}[a^2 + (2b^2 + 2c^2 - a^2) - 4b^2] = \frac{c^2 - b^2}{2}.$$

Eroarea se transmite relaţiei (4), p. 111, care se va înlocui cu

$$\overrightarrow{m}_a \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{m}_b \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{m}_c \cdot \overrightarrow{c} = 0.$$

II. În *Recreaţii Matematice nr. 1/2014*, se va face următoarea corectură în enunţul problemei L257 (l. română şi l. engleză):

p. 90: ,,circumscris" se înlocuieşte cu ,,înscris",

p. 92: ,,circumscribed" se înlocuieşte cu ,,inscribed".