**2.** Arătaţi că pentru orice numere pozitive $a, b, c$ cu $abc \leq 1$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

**3.** Determinaţi punctele $M$ din planul triunghiului echilateral $ABC$ cu proprietatea că $MB = 2MA$ şi $MC = 3MA$.

(*Recreaţii Matematice, 2/2012*)

# Concursul interjudeţean ,,Speranţe Olimpice", Ediţia a XIII-a, Paşcani, 2 noiembrie 2013

## Clasa a III-a

**I.** 1) Într-un pătrat cu dimensiunile $3 \times 3$ sunt scrise numerele $1, 2, 3$ şi 4.

Să se completeze cu numere naturale locurile rămase libere astfel încât suma numerelor din fiecare pătrat cu dimensiunile $2 \times 2$ să fie 10.

| | | |
|---|---|---|
| | 2 | |
| 1 | | 3 |
| | 4 | |

2) Scrieţi numerele de patru cifre $\overline{abcd}$, ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile: a) $a + b + c + d = 19$, b) cifra zecilor este 5, c) $a < b < c < d$.

**II.** Într-o urnă sunt bile negre şi albe. Numărul bilelor albe este triplul numărului bilelor negre. Se scot din urnă 15 bile albe şi se adaugă 9 bile negre, iar numărul bilelor albe devine egal cu numărul bilelor negre. Câte bile albe şi câte bile negre au fost la început în urnă?

**III.** La o petrecere au fost invitate 20 de persoane. Andra a dansat cu 7 băieţi, Brânduşa cu 8 băieţi, Corina cu 9 băieţi şi aşa mai departe, până la Georgiana, care a dansat cu toţi băieţii. Câte fete şi câţi băieţi au fost la petrecere? Justificaţi răspunsul dat.

## Clasa a IV-a

**I.** 1) Aflaţi termenul necunoscut $n$:

$$3333 - \{\overline{aa} : a + [(n - \overline{bbbb} : b) + 333 : 3] \cdot 3 + 333 + 33 : 3\} \cdot 3 = 1269.$$

2) Determinaţi $a, b, x, y$ astfel încât $(11+22+\ldots+99) : \overline{ab} = 11$ şi $\overline{ab} = \overline{xy} + \overline{yx} + 1$.

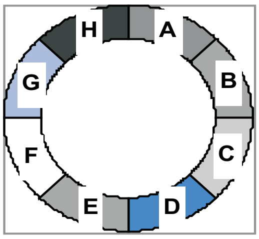
**Mihail Frăsilă**

**II.** 1) Se consideră tabloul cu 31 de linii:

a) Să se afle suma numerelor de pe linia a treisprezecea.
b) De câte ori apare în tablou numărul 13?
c) Să se determine numărul de apariţii ale cifrei 3 în scrierea tuturor numerelor din tabel.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | | | | | | |
| 3 | 2 | 1 | | | | | |
| 4 | 3 | 2 | 1 | | | | |
| ........................... | | | | | | | |
| 31 | 30 | 29 | 28 | ... | 3 | 2 | 1 |

2) Un ogar aleargă pe un traseu de formă circulară, ca în imagine. El pleacă din $A$ şi la primul salt ajunge în $D$, la saltul următor ajunge în $G$, apoi în $B$ şi aşa mai departe. Unde se află ogarul după 93 de salturi?




**III.** 1) Spunem că un număr de 3 cifre este ,,vesel" dacă este format numai din cifre pare; este ,,trist" dacă este format numai din cifre impare şi este ,,indiferent" dacă nu este nici ,,vesel" nici ,,trist".
a) Câte numere ,,vesele" avem?
b) Câte numere ,,triste" avem?
c) Câte numere ,,indiferente" avem ?

2) Să se afle câţi copii sunt într-o clasă dacă atunci când se aşază câte doi într-o bancă rămân trei copii în picioare, iar dacă se aşază câte trei în bancă rămân trei bănci libere şi o bancă va fi ocupată de un singur elev.

**Mihail Frăsilă**

## Clasa a V-a

**1.** Fie numerele naturale $a, b, c$. Împărţind pe $a$ la $b$ obţinem câtul 5 şi restul 4. Împărţind pe $b$ la $c$ obţinem câtul 6 şi restul 5.
a) Arătaţi că $a \geq 180$.
b) Determinaţi $a, b, c$ ştiind că $a + b + c = 256$.

**Vasile Pricop**

**2.** a) Calculaţi $(1^5 + 3^5) \cdot 2^5$.
b) Există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $7808^{2016} = x^5 + y^5$?

**Mihai Crăciun**

**3.** Fie numerele $2^{2012} = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ şi $5^{2012} = \overline{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m}$. Câte cifre are numărul $A = \overline{x_1 x_2 \ldots x_n\, y_1 y_2 \ldots y_m}$?

*G.M.-1/2012*

## Clasa a VI-a

**1.** Fie mulţimea $E = \{3, 7, 11, 15, 19, \ldots, 63, 67\}$.

a) Calculaţi suma elementelor mulţimii $E$.

b) Dacă $A$ este o submulţime a lui $E$ formată din 11 elemente, demonstraţi că mulţimea $A$ conţine două elemente a căror sumă este divizibilă cu 29.

**2.** Considerăm fracţia $\dfrac{a \cdot n + b}{c \cdot n + d}$, unde $n, a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $b$ şi $d$ au parităţi diferite, iar $a$ şi $c$ au aceeaşi paritate. Arătaţi că, dacă $ad - bc = 2^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci fracţia este ireductibilă.

*Recreaţii Matematice-2/2009*

**3.** a) Dacă $x, y, z, t$, sunt numere naturale astfel încât $10x - 9y - 36z + 18t = 0$, arătaţi că 18 divide produsul $x \cdot y$.

**Claudia Popescu**

b) Arătaţi că dacă numerele naturale nenule $a, b, c, x, y, z$ satisfac relaţiile $(a, x) = [b, y]$, $(b, z) = [c, x]$ şi $(c, y) = [a, z]$, atunci $a = b = c = x = y = z$.

**Andrei Eckstein**

## Clasa a VII-a

**1.** a) Arătaţi că $1007^2 > n(2014 - n)$ pentru orice $n \in \{1, 2, \ldots, 1006\}$.

b) Comparaţi numerele $2013!$ şi $1007^{2013}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

**Cristina Militaru**

**2.** a) Arătaţi că $13^n + 7^n - 2 \,\vdots\, 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Arătaţi că $13^n + 7^n - 2 \,\vdots\, 9$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

**Vasile Terciniu**

**3.** În triunghiul $ABC$ bisectoarea unghiului $A$ este paralelă cu simetrica dreptei $AB$ faţă de $BC$, iar bisectoarea unghiului $B$ este paralelă cu simetrica dreptei $AB$ faţă de $AC$. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$.

**Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă**

## Clasa a VIII-a

**1.** a) Fie numerele reale $x$ şi $y$ astfel încât $x - y + 1 = 0$ şi $y \in [1, 3]$. Să se arate că $\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13} = 2\sqrt{2}$.

b) Arătaţi că ecuaţia $|x - \dfrac{14}{5}| + |x - \dfrac{8}{3}| = x - 3$ nu are soluţii reale.

**2.** a) Arătaţi că pentru orice $x, y > 0$ este adevărată relaţia $\sqrt{x + y} \geq \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}}$.

b) Demonstraţi că, dacă $a, b > 0$ şi $ab = 1$, atunci $\sqrt{a + 16b} + \sqrt{b + 16a} \geq 5\sqrt{2}$.

**3.** Pe latura $BC$ a triunghiului $ABC$ se consideră punctele $D$ şi $E$ astfel încât $BD = DE = EC$. Mediana $BB'$ ($B' \in AC$) intersectează pe $AD$ în $M$, iar mediana $CC'$ ($C' \in AB$) intersectează pe $AE$ în $N$. Arătaţi că:

a) $BMNC$ este trapez;

b) $MN = MN = \frac{1}{4}BC$.

## Clasa a IX-a

**1.** Dacă $a, b, c > 0$ şi $a + b + c \geq 3$, atunci $\frac{a^4 + b^2}{c^2 + b} + \frac{b^4 + c^2}{a^2 + c} + \frac{c^4 + a^2}{b^2 + a} \geq 3.$

**Andrei Eckstein**

**2.** a) Să se arate că $x^2 - x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine mulţimea nevidă $A \subset \mathbb{R}^*$ cu proprietăţile: i) $A$ are cel mult 5 elemente, ii) dacă $x \in A$, atunci $\frac{1}{x} \in A$ şi $1 - x \in A$.

**Alina Ştefănescu**

**3.** Fie $O, I, G, H$ centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris, centrul de greutate, respectiv ortocentrul unui triunghi $ABC$. Să se arate că, dacă $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, atunci punctele $O, I, G, H$ sunt coliniare.

**Marian Teler şi Marian Ionescu**

## Clasa a X-a

**1.** Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{5}{6}$ şi $(n+1)a_{n+1} = (n-1)a_n$, pentru orice $n \geq 2$. Să se arate că $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 2$, $\forall n \geq 1$.

*G.M.-1/2013*

**2.** a) Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ cu propietatea că $3^x + 3^{3y} = 30$ şi $\log_3 x \cdot \log_3 y = -1$.

*G.M.-3/2013*

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care verifică relaţiile: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$ şi $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4$.

*G.M.-1/2013*

**3.** Pe laturile patrulaterului $ABCD$ se consideră punctele $M, N, P, Q$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DQ} = k\overrightarrow{DA}$, $k \in (0, 1)$.

Să se demonstreze că, dacă $MNPQ$ este paralelogram, atunci $k = \frac{1}{2}$ sau $ABCD$ este paralelogram.

**Marian Teler şi Marian Ionescu**

---