Concursul interjudeţean ,,Speranţe Olimpice"
Ediţia a XII-a, Paşcani, 3 noiembrie 2012

Clasa a III-a

1. a) Aflaţi suma $a+b+c+d$ ştiind că a,b,c,d sunt numere pare consecutive, iar $a+c=96$.

b) Ordonaţi crescător numerele $a-2, 2a-3, 3a-2, 2a-1$, ştiind că a este mai mare sau egal cu 2.

2. Se consideră şirul de numere naturale $42, 72, 102, 132, \ldots$.

a) Scrieţi următorii trei termeni ai şirului.

b)Aflaţi al 100-lea termen al şirului.

3. a) În câte moduri putem forma un şir indian compus din 4 băieţi şi 3 fete astfel încât două fete să nu stea una lângă alta, iar şirul să nu înceapă cu o fată?

b) Maria a cules nuci. Văzând că poate forma un număr exact de grupe de 12 nuci, ea dă câte 4 nuci din fiecare grupă prietenei sale şi constată că diferenţa dintre numărul nucilor care i-au rămas şi al celor date este 36. Câte nuci a cules Maria?

Clasa a IV-a

1. a) Calculează $175 - \{[(40 \times 10 - 100) : 100 + 18] \times 3 - 12\} : 3$.

b) Să se calculeze $a+b+c$, ştiind că: $a \times b = 60, a \times c = 90$ şi $b+c=10$.

2. a) Aflaţi valoarea lui a pentru care este adevărată egalitatea: $(\overline{aaa} + \overline{aa}) : a - a = 119$.

b) Fie trei numere naturale a căror sumă este 170. Dacă mărim dublul celui de-al doilea cu 4, obţinem cincimea primului număr. Să se determine numerele, ştiind că suma ultimelor două este mai mare decât primul cu 10.

3. a) Suma a şapte numere naturale este 2012. Se poate termina produsul lor în 2013? Justificaţi.

b) Demonstraţi că din 61 de numere naturale distincte a căror sumă nu depăşeşte 2012 putem alege două a căror sumă este 61.

Clasa a V-a

1. Se consideră numărul $A = \overline{3a} + \overline{a3}$.

a) Determinaţi cifra a pentru care A este pătrat perfect.

b) Arătaţi că nu există valori ale lui a astfel încât A să fie cub perfect.

c) Determinaţi a pentru care restul împărţirii lui A la 9 să fie egal cu 3.

2. a) Arătaţi că există numere naturale a,b,c astfel încât $6^{2009} = a^3 + b^3 + c^3$.

b) Să se determine ultimele trei cifre ale numărului $a = 3^{4n+4} + 2 \cdot 3^{4n+2} + 3^{4n}$.

3. Scriem, pe rând, 2013 numere naturale, nenule, distincte, cu proprietatea că suma oricăror două numere vecine este număr par.

a) Să se demonstreze că cea mai mică sumă posibilă a celor 2013 numere este pătrat perfect.

b) Să se arate că, oricum am alege şapte dintre aceste numere, există cel puţin două a căror diferenţă se împarte exact la 12.

Clasa a VI-a

1. a) Arătaţi că $n(n+3)+2=(n+1)(n+2)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

b) Demonstraţi că numărul $A = \dfrac{(2\cdot 5+2)(4\cdot 7+2)(6\cdot 9+2)\cdot ...\cdot(2012\cdot 2015+2)}{(3\cdot 6+2)(5\cdot 8+2)(7\cdot 10+2)\cdot ...\cdot(2011\cdot 2014+2)}$ este natural.

2. a) Aflaţi numerele naturale x şi y ştiind că suma lor este 250, iar câtul împărţirii (cu rest) a lui x la y este 7.

b) Să se afle restul împărţirii numărului $S = 1^1+2^2+3^3+4^4+5^5+6^6+\ldots+2009^{2009}$ la 4.

3. a) Determinaţi numerele naturale x şi y ştiind că $x^2+x+y=58$ şi y este număr prim.

b) Scrieţi numărul 2010 ca o sumă a unor numere naturale şi ca produs al aceloraşi numere naturale.

Clasa a VII-a

1. Pe un cerc sunt 11 numere naturale astfel încât suma oricăror trei numere alăturate este cel mult 19, iar suma oricăror patru numere alăturate este cel puţin 25. Să se determine suma celor 11 numere.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$; arătaţi că:

a) $\left(\dfrac{a^2}{b}-b\right)^2 = \dfrac{a^4}{b^2}-2a^2+b^2$;

b) $\dfrac{a^4}{b^2}+\dfrac{b^4}{c^2}+\dfrac{c^4}{a^2} \geq a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

3. Se dă pătratul $ABCD$ cu latura 7 şi M, N, P, Q pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, respectiv $[DA]$, astfel încât $AM = BN = CP = DQ = 3$.

Demonstraţi că $MNPQ$ este pătrat şi determinaţi latura acestuia.

Clasa a VIII-a

1. a) Arătaţi că $\dfrac{n}{1+n^2+n^4} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(n-1)n+1} - \dfrac{1}{n(n+1)+1}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculaţi suma

$$S = \frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+...+\frac{2012}{1+2012^2+2012^4}.$$

2. a) Aflaţi numerele reale x, y, z ştiind că $3(x+y+1) \leq (\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}+2)^2$.

b) Arătaţi că numerele $a = (2+1)(2^2+1)(2^{2^2}+1)\cdot ...\cdot(2^{2^{2012}}+1)$ şi $b = 4^{2^{2012}}$ sunt consecutive.

3. Triunghiul ABC are $m\left(\widehat{BAC}\right) = 20^\circ$ şi $[AB] \equiv [AC]$. Fie $M \in (AC)$ astfel încât $m(\widehat{ABM}) = 10^\circ$. Demonstraţi că $[AM] \equiv [BC]$.

(*Gazeta Matematică, nr. 9/2012*)