Concursul ,,Recreaţii Matematice"
Ediţia a X-a, Muncel, 24 august 2012

Clasa a IV-a

1. Aflaţi suma numerelor naturale a şi b ştiind că a reprezintă descăzutul dintr-o operaţie de scădere în care suma dintre descăzut, scăzător şi diferenţă este 1502, iar b reprezintă cel mai mare rest al împărţirii unui număr natural la 511.

2. Pe tablă sunt scrise numerele: $1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 23, 48$. Dan şi Ana au şters fiecare câte 4 numere şi au observat că suma numerelor şterse de Dan este de patru ori mai mare decât suma numerelor şterse de Ana.

a) Ce număr a rămas pe tablă?

b) Ce numere a şters fiecare copil?

3. Să se calculeze $29 - 30 + 31 - 32 + 33 - 34 + \ldots + 149 - 150 + 151$.

4. Un fermier are la dizpoziţie o sfoară lungă de 540 m pentru a delimita o suprafaţă de teren. El are de ales între a delimita un dreptunghi cu lungimea de două ori mai mare decât lăţimea sau un pătrat. Cum va delimita fermierul suprafaţa de teren, pentru ca aceasta să fie cât mai mare?

(*Propunător, prof. Doina Nechifor*)

Clasa a V-a

1. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare (situate pe aceeaşi dreaptă) în această ordine, cu $AB + AD = 2AC$ şi $BD = 2^{31}(cm)$. Să se afle lungimea segmentului BC.

2. Se consideră numărul $a = 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2009}$.

a) Demonstraţi că numărul a nu este pătrat perfect.

b) Aflaţi restul împărţirii lui a la 400.

(*Recreaţii Matematice, 1/2009*)

3. Ionel, Gigel şi Vasilică au un coş cu mere. Ionel a împărţit merele din coş în trei părţi egale şi a luat una din părţi. După aceasta, Gigel a împărţit merele rămase în patru părţi egale şi a luat una din părţi. În final, Vasilică a împărţit merele rămase în cinci părţi egale, a luat una din părţi şi a constatat că în coş au mai rămas 36 de mere.

a) Aflaţi câte mere au fost la început în coş.

b) Câte mere a luat fiecare copil?

Clasa a VI-a

1. În triunghiul ABC avem $AC < BC$ şi $m(\measuredangle ACB) = 60°$. Pe latura (BC) se consideră punctul D astfel încât $(BD) \equiv (AC)$ şi fie punctul E simetricul punctului A faţă de punctul C. Să se demonstreze că $[DE] \equiv [AB]$.

2. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ şi $m(\measuredangle BAC) = 30°$. Punctul D se află în interiorul unghiului $\measuredangle ACB$, astfel încât $m(\measuredangle DCB) = 15°$ şi $m(\measuredangle DBA) = 75°$. Demonstraţi că are loc egalitatea $AC = AD$.

(*Recreaţii Matematice, 2/2012*)

3. Aflaţi numerele naturale de patru cifre în baza 10 care au exact 64 de divizori.

Clasele a VII-a şi a VIII-a

1. Într-un plan considerăm cercurile $C(O_1; r_1)$, $C(O_2; r_2)$ şi $C(O_3; r_3)$, cu razele $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_1$. Tangentele comune exterioare cercurilor $C(O_1; r_1)$ şi $C(O_2; r_2)$ se intersectează în M, cele ale cercurilor $C(O_1; r_1)$ şi $C(O_3; r_3)$ se intersectează în N iar cele ale cercurilor $C(O_2; r_2)$ şi $C(O_3; r_3)$ se intersectează în P. Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare.

2. Arătaţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n^4 \cdot m + 1$ să fie număr natural compus.

(*Recreaţii Matematice, 1/2009*)

3. Fie triunghiul ABC şi punctele M, N, P astfel încât $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (BC)$ şi $AP \cap MN = \{Q\}$. Să se arate că $\dfrac{MQ}{NQ} = \dfrac{BP}{CP} \cdot \dfrac{AC}{AB} \cdot \dfrac{AM}{AN}$.

Clasele a IX-a şi a X-a

1. Pe un cerc fix $C(O; R)$ se iau punctele mobile A, B, C. Ştiind că suma razelor cercurilor exînscrise triunghiului ABC este constantă, să se determine locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul ABC.

2. Fie funcţia $f_\lambda : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} |x-2|, & x \in [-1, \lambda] \\ \lambda x - 1, & x \in (\lambda, +\infty) \end{cases}$, $\lambda \geq 0$ fiind un parametru real.

a) Rezolvaţi ecuaţia $f_{\frac{1}{3}}(x) = f_3(x)$.

b) Arătaţi că, pentru orice $\lambda \geq 0$, compunerea $f_\lambda \circ f_\lambda$ este posibilă.

c) Rezolvaţi ecuaţia $f_2(f_0(x)) = f_1(x)$.

3. Fie P un punct pe mediana din A a triunghiului ABC. Paralela prin P la AC taie AB în M, iar simetricul lui P faţă de mijlocul lui AC este N. Arătaţi că $MN \| BC$ dacă şi numai dacă P este centrul de greutate al triunghiului ABC.
