Concursul interjudeţean ,,Speranţe Olimpice”
Ediţia a XI-a, Paşcani, 12 noiembrie 2011

Clasa a III-a

1. a) Găseşte regula şi completează cu numerele corespunzătoare:

3517	1245	6326	3217	1425
88	39	98	$\square$	$\square$

b) Află numărul necunoscut: $200 - a + (100 - 68) = 126 - 78$.

2. a) Câte numere de 8 se găsesc în intervalul de la 5 la 90?

b) Reconstituiţi adunarea: $\overline{2a7b} + \overline{51c6} = \overline{8d94}$.

3. a) La o librărie s-a adus 749 caiete: dictando, de matematică şi vocabulare. Caietele dictando şi cele de matematică împreună sunt cu 229 mai puţine decât cele de matematică împreună cu vocabularele. Câte caiete s-au adus de fiecare fel, dacă cele dictando împreună cu cele de matematică sunt 396?

b) În dreptunghiurile de mai jos sunt scrise numere astfel încât suma numerelor din fiecare patru dreptunghiuri alăturate să fie aceeaşi.

Care este numărul din ultima căsuţă?

25		10					

Clasa a IV-a

1. a) Aflaţi a din egalitatea: $[(a : 7 + 107) : 4 \times 10 - 192] : 4 = 87$.

b) Dacă $a \times b = 8$, iar $c \times a = 10$, calculaţi $a \times (b + c) : 7$ şi $a \times (b - c) : 8$.

2. Suma a trei numere este 88. Dacă din primul număr luăm 15, din al doilea 19, iar din al treilea 21, obţinem trei numere consecutive. Aflaţi numerele.

3. a) Determinaţi toate numerele de forma $\overline{abc}$, ştiind că $a + c = b \times b$.

b) Demonstraţi că dintre şapte numere naturale, există cel puţin două care dau acelaşi rest la împărţirea prin 6.

Clasa a V-a

1. a) Să se scrie numărul 189^{2011} ca sumă de trei pătrate perfecte.

b) Într-un grup de 28 copii, fiecare copil oferă câte o floare fiecărei fete. Ştiind că în total s-au oferit 270 de flori, să se determine numărul de băieţi şi de fete.

2. a) Determinaţi cel mai mic număr natural care începe cu 2011, se termină cu 2011 şi are suma cifrelor 2011.

b) Numărul A este scris cu 66 cifre de 3, iar numărul B este scris cu 33 de cifre de 6. Determinaţi produsul $A \times B$.

3. Dacă a, b, c sunt numere naturale nenule astfel încât $a^2 = b^2 + c^2$, arătaţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există p şi q numere naturale nenule astfel încât $a^{2n} = p^2 + q^2$.

Clasa a VI-a

1. Pe o tablă sunt scrise numerele $1, 2, 3, \ldots, 9999$. La un pas se pot şterge câteva dintre numerele scrise şi în locul lor se scrie restul de la împărţirea sumei numerelor şterse prin 11. După câţiva paşi pe tablă au rămas scrise două numere, unul dintre ele fiind 1023. Care este cel de-al doilea număr?

2. Fie $E(n) = \dfrac{5^{2n+1} + 2^{2n+3} \times 3^n}{2^{n+2} + 3^{n+2} \times 5^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Calculaţi $E(1)$.
b) Arătaţi că $E(n) > 1$, pentru $n \geq 2$.
c) Arătaţi că $E(n)$ se simplifică cu 13.

3. Determinaţi numerele naturale n, $n \leq 23$, astfel încât 5 divide a, unde $a = 2^{2n+1} + 3^{3n+2} + 4^{4n+3}$.

Clasa a VII-a

1. Se dă şirul de numere $37, 337, 3337, \ldots$.
a) Daţi exemplu de doi termeni ai şirului al căror raport este număr natural.
b) Arătaţi că şirul dat conţine o infinitate de numere care nu sunt prime.

2. a) Dacă $0 \leq a \leq 5$, $0 \leq b \leq 7$ şi $2a + 3b = 24$, arătaţi că $ab \leq 27$.
b) Să se arate că numărul

$$N = \frac{800}{19}\left(\frac{1}{1+2+3+\ldots+100} + \frac{1}{1+2+3+\ldots+101} + \frac{1}{1+2+3+\ldots+1999}\right)$$

este cub perfect.

3. Punctul P este situat în interiorul $\triangle ABC$, iar M şi N sunt simetricele punctului P în raport cu mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Arătaţi că P se află pe înălţimea din A a $\triangle ABC$ dacă şi numai dacă $[BN] \equiv [CM]$.

Clasa a VIII-a

1. Arătaţi că există o infinitate de mulţimi finite nevide A şi B, cu elemente numere naturale nenule, care verifică simultan relaţiile:
a) Card A = Card $B + 1$;
b) $x < y$, oricare ar fi $x \in A$ şi oricare ar fi $y \in B$;
c) elementele lui $A \cup B$ sunt numere consecutive;
d) suma elementelor lui A este egală cu suma elementelor lui B.

2. Fie $a, b, c \in (0; +\infty)$ cu $a + b + c = 1$. Demonstraţi că:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leq \frac{3}{2}.$$

3. Considerăm patrulaterul convex $ABCD$ cu proprietatea că A, D sunt situate într-un plan α, iar B şi C nu aparţin planului α. Fie punctele $M \in (AB)$, $N \in (CD)$ astfel încât $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{DN}{CN} = k$. Arătaţi că dacă $MN = \dfrac{1}{k+1}AD + \dfrac{k}{k+1}BC$, atunci $BC \| \alpha$.
