Concursul ,,Recreaţii Matematice"
Ediţia a IX-a, Muncel, 24 august 2011

Clasele III-IV

1. a) Suma a cinci numere naturale nenule este 14. Calculaţi produsul tuturor diferenţelor care se pot forma cu cele cinci numere.

b) Determinaţi $a+b+c$, ştiind că $a-30=b+c$ şi $200:(b+c)=5$.

2. Un număr de două cifre are cifra unităţilor de 3 ori mai mare decât cifra zecilor. Aflaţi numărul, ştiind că răsturnatul său este cu 36 mai mare ca numărul iniţial.

Recreaţii Matematice

3. Din cauza unei erori a tipografului, la numerotarea paginilor unei cărţi în locul cifrei 8 s-a scris peste tot cifra 3. Astfel, apare de 66 de ori cifra 3. Câte pagini are cartea?

Subiecte selectate de inst. **Doina Nechifor**

Clasa a V-a

1. Determinaţi numerele de forma $\overline{5abc}$ care, împărţite la $\overline{abc5}$, dau câtul de 595 de ori mai mic decât restul.

Recreaţii Matematice

2. Determinaţi numerele $\overline{abc}$, scrise în baza 10, divizibile cu 22, dacă $c=2\cdot b$.

Artur Bălăucă

3. *Problema lui Poisson.* Cineva avea într-o damingeană 12 litri de vin şi dorea să dăruiască din el jumătate. Nu avea decât două vase: unul de 8 litri şi altul de 5 litri. Cum se poate proceda pentru a separa 6 litri de vin în vasul de 8 litri?

Notă. Siméon Denis Poisson (1781-1840): *Această problemă mi-a determinat soarta, am hotărât să mă fac neapărat matematician.*

Clasa a VI-a

1. Dacă fracţia $\dfrac{3n+7}{2n+3}$, $n\in\mathbb{N}$, este reductibilă, determinaţi ultima cifră a lui n.

Recreaţii Matematice

2. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia $x^{2y}+144=25x^y$.

3. În triunghiul ABC se ştie că $m(\sphericalangle ABC)=15^o$ iar unghiul format de bisectoarea şi înălţimea corespunzătoare unghiului $\sphericalangle BAC$ are măsura de 15^o. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Artur Bălăucă

Clasa a VII-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x+y}+1=0$.

Artur Bălăucă

2. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu AB=AC şi $m(\sphericalangle BAC)$<90^o. Construim înălţimea $[CF]$ şi fie E mijlocul segmentului (BF), iar D un punct pe segmentul (BC).

Dacă $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$, arătaţi că punctul D este mijlocul segmentului (BC).

Recreaţii Matematice

3. Fie triunghiul ABC şi D, E, F picioarele bisectoarelor duse din vârfurile A, B, respectiv C. Dacă punctul I este centrul cercului înscris triunghiului ABC, arătaţi că $\frac{IA}{AD} \cdot \frac{IB}{BE} \cdot \frac{IC}{CF} \leq \frac{8}{27}$.

Clasa a VIII-a

1. Arătaţi că:

a) nu putem aşeza pe un cerc numerele $1, 2, 3, ..., 2011$ astfel încât modulul diferenţei dintre oricare două numere alăturate să fie acelaşi;

b) putem aşeza pe un cerc numerele $1, 2, 3, ..., 2011$ astfel încât modulul diferenţei dintre oricare două numere alăturate să fie 2 sau 3.

Gheorghe Iurea

2. a) Să se arate că din orice şapte numere aparţinând intervalului $(1; 13)$ se pot alege trei care să reprezinte lungimile laturilor unui triunghi.

b) Să se arate că există şapte numere aparţinând intervalului $[1; 13]$ astfel încât oricare trei nu pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi.

Recreaţii Matematice

3. Fie $ABCD$ un tetraedru şi A', B', C', D' centrele de greutate ale feţelor (BCD), (ACD), (ABD), respectiv (ABC). Arătaţi că:

a) dreptele AA', BB', CC', DD' sunt concurente (notăm cu G punctul de concurenţă al acestora);

b) $AG = \frac{3}{4} AA'$.

Clasa a IX-a

1. Suma a patru numere naturale nenule este 2011. Arătaţi că cel mai mic multiplu comun al numerelor este cel puţin 670.

Gheorghe Iurea

2. Fie $ABCD$ un dreptunghi şi M un punct din planul său. Arătaţi că $MA \cdot MB + MC \cdot MD \geq AB \cdot BC$.

Gheorghe Iurea

3. Demonstraţi că $\operatorname{tg} x > 4 \sin x - 2$, oricare ar fi $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Recreaţii Matematice

Clasa a X-a

1. În câte moduri putem împărţi 6 banane la 4 babuini, ştiind că fiecare babuin primeşte cel puţin o banană?

Al. G. Mîrşanu

2. Considerăm şirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit astfel: $x_0 = x_1 = 0$ şi $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 15^3 \cdot n \cdot 16^{n-1}, \forall n \geq 0$.

a) Arătaţi că $x_n = 15n + 2 + (15n - 32) \cdot 16^{n-1}, \forall n \geq 0$.

b) Găsiţi restul împărţirii lui x_{2011} la 13.

Lucian Lăduncă

3. Fie $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, cu $x, y \in \mathbb{Q}$ şi $|z| = 1$. Demonstraţi că $|z^{2n} - 1| \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Iurea