Problema 2. Fie triunghiul ABC, vectorii $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ şi punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \lambda\bar{x}$, $\overrightarrow{BN} = \lambda\bar{y}$ şi $\overrightarrow{CP} = \lambda\bar{z}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Se cere locul geometric al centrului de greutate Q al triunghiului (eventual degenerat) MNP, când λ variază.

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ şi $a > 0$ a.î. pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc relaţia

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{(f(x) - f^2(x)}. \qquad (1)$$

Să se arate că f este periodică şi să se dea un exemplu de funcţie care verifică (1).

Clasa a XII-a

Problema 1. Se notează cu f_n derivata de ordin n ($n \geq 1$) a funcţiei $(x^2 - 1)^n$.

a) Calculaţi f_1, f_2 şi f_3.

b) Arătaţi că există exact n valori $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ pentru care $f_n(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

c) Acceptând că are loc relaţia de recurenţă $f_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) f_n(x) + c_n f_{n-1}(x)$, determinaţi coeficienţii a_n, b_n c_n.

Problema 2. Pe o insulă trăieşte un grup de cameleoni de trei culori: 17 sunt roşii, 15 sunt verzi, iar 13 sunt galbeni. Dacă doi cameleoni de culori diferite se întâlnesc, atunci fiecare îşi schimbă culoarea în cea de a treia. Schimbarea culorii unui cameleon se petrece doar în această situaţie.

Se poate să se ajungă la situaţia că toţi cameleonii au aceeaşi culoare?

Problema 3. Fie $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor din $M_n(\mathbb{C})$ de forma

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

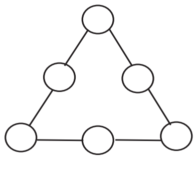
a) Arătaţi că $B \in M_n(\mathbb{C})$ comută cu toate matricele din $\mathcal{M}$ dacă şi numai dacă $B \in \mathcal{M}$.

b) Calculaţi $A(1, 1, 0, \ldots, 0)^n$.

Concursul ,,Speranţe Olimpice"
Ediţia a X-a, Paşcani, 6 septembrie 2010

Clasa a III-a

1. a) Aranjaţi numerele $10, 20, 30, 40, 50, 60$ în triunghiul alăturat, astfel încât suma de pe fiecare latură să fie 100. Găsiţi cel puţin două posibilităţi.



b) Ştiind că $\Delta + \Delta + 6 = \Delta + \Delta + \Delta + \Delta$, ce cifră ascunde simbolul Δ?

2. a) Copiii au măsurat lungimea terenului de nisip cu paşii.

Ana a făcut 15 paşi egali, Anca 17, Dana 12 şi Ionuţ 14. Care dintre copii are pasul mai mare?

b) În parc sunt trei adulţi, fiecare însoţit de câte trei copii. Fiecare copil plimbă câte un câine şi fiecare câine este înconjurat de câte trei căţeluşi. Câte picioare sunt în parc?

3. Radu, Nicu şi Mihaela s-au pregătit pentru concursul Speranţe Olimpice. Radu şi Nicu au rezolvat 63 probleme, Nicu şi Mihaela 73, iar Radu şi Mihaela 64. Câte probleme a rezolvat fiecare copil?

Clasa a IV-a

1. 1. a) Folosiţi de 7 ori cifra 7 şi diferite operaţii aritmetice pentru a obţine numărul 100.

b) Aflaţi m din egalitatea

$$3333 - \{\overline{aa} : a + [(n - \overline{bbbb} : b) + 333 : 3] \cdot 3 + 333 + 33 : 3\} \cdot 3 = 1269.$$

2. a) De câte ori se găseşte numărul 9 în intervalul de la 5 la 100?

b) Într-un depozit s-au adus lămâi, portocale şi banane. Lămâi erau cât portocale şi banane la un loc, adică 37 de lăzi a 15 kg fiecare. Dacă împărţim numerele care reprezintă cantitatea (în kilograme) de portocale şi cea de banane, obţinem câtul 5 şi restul egal cu întreitul câtului. Aflaţi cele trei cantităţi de fructe.

3. a) În 5 vase se aşează 31 de lalele. În fiecare vas se găseşte un număr impar de lalele şi nu există vase cu acelaşi număr de flori. Găsiţi cel puţin două modalităţi de aşezare a lalelelor.

b) Suma a şase numere este 1433. Primele două numere sunt pare consecutive. Suma dintre al treilea şi al patrulea este 360, iar unul este a cincea parte din celălalt. Diferenţa ultimelor două numere este 321, iar unul din ele este sfertul celuilalt. Determinaţi cele şase numere.

Clasa a V-a

1. a) Determinaţi numerele naturale a, b, c, ştiind că $2^a + 2^{b-a} + 2^{a+b+c} = 1153$.

b) Dacă x, y, z sunt numere naturale astfel încât numerele 2^x, 2^y, 2^z dau resturi distincte la împărţirea cu 7, arătaţi că $2^x + 2^y + 2^z$ se divide cu 7.

2. Fie $a = 2^{n+1} \cdot 2^{n+2} \cdot 3$ şi $b = 2^{n+2} \cdot 5^{n+2} \cdot 7$.

a) Comparaţi numerele a şi b.

b) Aflaţi suma cifrelor numărului $a + b$.

c) Arătaţi că $2a + 13$ nu poate fi pătrat perfect.

3. a) Demonstraţi că numărul $N = 2010 + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 2009)$ este pătrat perfect.

b) Reconstituiţi adunarea:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & M & A & T & E & M & A & T & I & C & A & + \\
 & & M & A & T & E & M & A & T & I & C & \\
 & & & M & A & T & E & M & A & T & I & \\
 & & & & M & A & T & E & M & A & T & \\
 & & & & & M & A & T & E & M & A & \\
 & & & & & & M & A & T & E & M & \\
 & & & & & & & M & A & T & E & \\
 & & & & & & & & M & A & T & \\
 & & & & & & & & & M & A & \\
 & & & & & & & & & & M & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 9 & 7 & 6 & 7 & 6 & 1 & 1 & 7 &
\end{array}$$

Clasa a VI-a

1. a) Arătaţi că $(a-1)(1+a+a^2+\ldots+a^n)=a^{n+1}-1$ pentru $a\in\mathbb{N}$, $a\geq 2$ şi $n\in\mathbb{N}$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $5+5\cdot 6+5\cdot 6^2+\ldots+5\cdot 6^{2008}=x^{2009}-1$.

c) Arătaţi că $\dfrac{6^{2009}-6}{35}\in\mathbb{N}$.

2. Bananele dintr-o cutie, pentru a fi comercializate, sunt puse în pungi. Dacă se pun câte 8 banane, într-o pungă rămân 5 banane, dacă se pun câte 10 banane, într-o pungă rămân 3 banane, iar dacă se pun câte 18 banane, într-o pungă rămân 15 banane. Să se afle numărul maxim de banane din cutie, ştiind că acesta nu depăşeşte 2010.

3. a) Demonstraţi că numărul $N=x^2+y+x+y^2$ este par, oricare ar fi numerele naturale x şi y.

b) Determinaţi numerele naturale x şi y pentru care $x^2+y+x+y^2-13=4^{(x-3y)^2}$.

Clasa a VII-a

1. Se dau numerele naturale nenule a şi b şi numerele raţionale $x=\dfrac{2a+b}{3b+2}$, $y=\dfrac{3b+2}{8}$ şi $z=\dfrac{8}{2a+b}$.

a) Determinaţi a şi b, dacă x,y,z sunt simultan numere naturale.

b) Demonstraţi că $\dfrac{x}{4}$, $\dfrac{y}{2}$ şi $4z$ nu pot fi simultan numere naturale.

2. a) Demonstraţi că $n^2-(n-1)(n+1)>0$, oricare ar fi numărul $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Arătaţi că $\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\ldots+\dfrac{1}{2011^2}<0,125$.

c) Pe fiecare pătrăţel al unei table 7×7 (asemănătoare celei de şah) se află câte o broscuţă. La o bătaie din palme, fiecare broscuţă sare pe un pătrăţel care are o latură comună cu pătrăţelul pe care se afla ea iniţial. Arătaţi că după o bătaie din palme, după ce broscuţele se aşează, rămâne cel puţin un pătrăţel neocupat de vreo broscuţă.

3. Fie $\triangle ABC$ un triunghi echilateral, iar P un punct pe latura AC. Bisectoarea unghiului $\angle ABP$ taie paralela prin A la BC in Q. Demonstraţi că $BP=CP+AQ$.

Clasa a VIII-a

1. a) Arătaţi că $98|5^{2010} - 3^{2010}$.

b) Fie a, b, c numere întregi cu proprietatea că $ab+ac+bc = 0$. Arătaţi că numărul $3abc$ se poate scrie ca sumă a patru cuburi perfecte.

2. a) Demonstraţi că ecuaţia $3x^2 + 2x = 12y^2 - 20y$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$.

b) Arătaţi că ecuaţia de mai sus are o infinitate de soluţii în $\mathbb{Q}$.

3. a) Fie ABC un triunghi de laturi a, b, c astfel încât $b + c = a\sqrt{2}$. Demonstraţi că triunghiul este ascuţitunghic dacă şi numai dacă b şi c sunt distincte şi se află în intervalul $\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)$.

b) Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi fie M mijlocul muchiei BB'. Dacă $\{E\} = AC \cap BD$, demonstraţi că $EM \perp (ACD')$.

Recreaţii ... matematice

Cam cu 300 ani înainte de Hristos matematicianul alexandrin **Euclid** a scris o carte monumentală intitulată **Elemente**. Această carte, una din cele mai grandioase manifestări ale culturii eline, prin conţinutul riguros şi forma perfectă s-a impus într-atât generaţiilor următoare încât şi astăzi formează scheletul geometriei elementare şcolare. În unele ţări geometria s-a predat chiar după textul lui Euclid şi în mai toate ţările cărţile de geometrie şcolară sunt compilări, mai mult sau mai puţin fidele, ale Elementelor. Poetul francez *Sully Prudhomme*, laureat al premiului Nobel în anul 1901, a cântat astfel această operă:

J' ouvre un Euclide avec amour[*],
Il propose, il prouve et j' écoute,
Et je suis inondé de jour.

L' évidence, éclair de l' étude,
Jaillit et me laisse enchanté;
Je savoure la certitude,
Mon seul vrai bonheur, ma santé!

Două mii de ani de frământări ştiinţifice n-au putut să clatine întru nimic opera geometrică a lui Euclid, care a continuat să joace un rol unic, exclusiv, până la începutul secolului al XIX-lea, când matematicienii au început să scruteze mai cu succes primele principii, axiomele, ce stau la baza geometriei, şi au adus la lumină geometrii noi (geometriile neeuclidiene).

(după **Al. Myller** – *Evoluţia ideei de spaţiu*, Revista Ştiinţifică "V. Adamachi, XII (1925-1926), nr. 4, pp. 164-168)

[*] Deschid pe Euclid cu inimă preaplină,/ El enunţă şi demonstrează, iar eu ascult/ Şi sunt inundat de lumină.// Evidenţa, străfulgerare a studiului,/ Ţâşneşte şi mă-ncântă;/ Eu simt savoarea certitudinii,/ Singura şi deplina mea fericire, sănătatea mea!