CONCURSURI ŞI EXAMENE

Concursul "Recreaţii Matematice"
Ediţia a VIII-a, Muncel, 22-29 august 2010

Clasa a V-a

1. O coală de hârtie dreptunghiulară este îndoită succesiv astfel încât să se obţină suprafeţe egale.

a) Câte îndoiri se fac pentru a se obţine mai mult de 100 de suprafeţe egale?

b) Găsiţi cel mai mic număr de tăieturi cu un foarfece astfel încât să obţinem cel puţin 25 de suprafeţe egale.

2. Pe malul unui râu există o barcă ce suportă maxim 32 kg peste greutatea barcagiului. Mihăiţă, care cântăreşte 30 kg, Ana care cântăreşte 26 kg, patru căţeluşi care au fiecare câte un kilogram şi 12 iepuraşi, fiecare cântărind o treime de kilogram, trebuie să traverseze râul. Cum pot traversa râul cu barca în cât mai puţine drumuri Mihăiţă, Ana, căţeluşii şi iepuraşii?

Recreaţii Matematice

3. Fie a, b, c cifre nenule în sistemul zecimal. Notăm cu S suma tuturor numerelor de două cifre distincte care se pot forma doar cu a, b şi c.

a) Aflaţi câtul şi restul împărţirii lui S la 11.

b) Determinaţi toate numerele de forma $\overline{abc}$, dacă $S = 528$.

Clasele VI-VII

1. Directorul Taberei Naţionale de Matematică de la Muncel primeşte cheile pentru a descuia uşile camerelor unde urmează a fi cazaţi participanţii; nici o cheie nu se potriveşte la două uşi. El efectuează 55 de încercări pentru a descuia toate uşile, deoarece are ghinion din plin şi nu nimereşte decât în utimul moment cheia potrivită. Câte uşi a descuiat directorul Taberei?

2. Determinaţi numerele naturale a şi n pentru care $a^{2n} - 9 = 8 \cdot (9 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^{2009})$.

Recreaţii Matematice

3. Arătaţi că oricare ar fi numărul natural nenul n, printre elementele mulţimii $\{2n, 2n+1, 2n+2, \ldots, 4n\}$ există cel puţin o putere a lui 2.

Clasa a VIII-a

1. Să se arate că $2 \cdot \left(\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \dfrac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1005^2}{2009 \cdot 2011}\right) < 502\dfrac{3}{4}$.

Recreaţii Matematice

2. a) Arătaţi că $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale prime ecuaţia $x^4 + y^3 + 10 = (x+y-2)^3$.

3. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC, A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, iar D, E, F picioarele înălţimilor triunghiului ABC corespunzătoare vârfurilor A, B şi, respectiv, C. Se mai consideră punctele A'', B'', C'' mijloacele înălţimilor $[AD]$, $[BE]$ şi $[CF]$. Să se arate că segmentele $A'A''$, $B'B''$ şi $C'C''$ sunt concurente.

Clasa a IX-a

1. Lungimile a, b, c ale laturilor unui triunghi satisfac relaţia $2\left(a^8+b^8+c^8\right) = \left(a^4+b^4+c^4\right)^2$. Să se demonstreze că triunghiul este dreptunghic.

2. Determinaţi $\overline{abcd}$ cu $a, c \neq 0$, pentru care $\dfrac{\sqrt{\overline{abcd}}}{\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{\overline{cd}}} \in \mathbb{Q}$.

Recreaţii Matematice

3. Fie $ABCD$ un tetraedru şi I_A, I_B, I_C şi I_D centrele cercurilor înscrise în feţele BCD, ACD, ABD, respectiv, ABC. Ştiind că toate muchiile au lungimi numere naturale, dreptele AI_A, BI_B, CI_C şi DI_D sunt concurente şi suma lungimilor tuturor muchiilor este 12, să se demonstreze că tetraedrul $ABCD$ este o piramidă regulată.

Clasa a X-a

1. a) Fie $ABCDE$ un pentagon convex, iar M, N, P, Q, X şi Y mijloacele segmentelor $[BC], [CD], [DE], [EA], [NQ]$, respectiv, $[MP]$. Să se demonstreze că $XY \parallel AB$ şi $XY = \dfrac{AB}{4}$.

b) În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $AB > CD$ considerăm M şi N mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv, $[BD]$. Să se arate că perpendiculara din M pe AD, perpendiculara din N pe BC şi mediatoarea segmentului $[AB]$ sunt drepte concurente.

2. Fie a, b numere reale şi mulţimea $A = \{\{an\} - \{bn\} / n \in \mathbb{N}\}$. Să se arate că mulţimea A este finită dacă şi numai dacă $a - b \in \mathbb{Q}$ ($\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului $x \in \mathbb{R}$).

Recreaţii Matematice

3. Numerele întregi se colorează cu n culori astfel încât dacă $x, y \in \mathbb{Z}$ şi $|x-y| \in \{2, 3, 5\}$, atunci x şi y au culori diferite. Să se arate că $n \geq 4$.

Clasa a XI-a

1. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0;1)$ sau $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1;+\infty)$ şi funcţiile injective $f, g : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Să se arate că $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\log_{a_k} a_{f(k)}}{a_{g(k)}}\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) \geq n^2$.

Recreaţii Matematice

2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$ şi

$$E = \sqrt{x_1(x_2+1)} + \sqrt{x_2(x_3+1)} + \ldots + \sqrt{x_n(x_1+1)}.$$

Determinaţi maximul şi minimul expresiei E.

Recreaţii Matematice

3. Fie triunghiul ABC cu unghiurile a, b, c astfel încât $a < b < c$. Să se arate că

$$\frac{\sin a}{(a-b)(a-c)} + \frac{\sin b}{(b-c)(b-a)} + \frac{\sin c}{(c-a)(c-b)} < 0.$$

Clasa a XII-a

1. Fie matricele $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AC + BD = I_n$ iar $AD = BC$. Demonstraţi că $CA + DB = I_n$ şi $DA = CB$.

Recreaţii Matematice

2. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$, iar $x_0 \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\ln n} = 1$.

3. Considerăm şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi valorile lui n pentru care x_n este număr natural.

Concursul de matematică ,,Gaudeamus"
Ediţia a II-a, Iaşi, 30 octombrie 2010

Clasa a X-a

Problema 1. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi H este ortocentrul său, demonstraţi că $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

2) Se dau: un punct O, un număr strict pozitiv r şi un vector $\overline{u}$. Construiţi trei vectori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ de aceeaşi mărime r, ştiind că suma lor este vectorul dat $\overline{u}$.

Problema 2. Se consideră $\mathcal{P} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mulţimea punctelor de coordonate întregi din plan. Spunem că un punct $A \in \mathcal{P}$ este vizibil (din punctul $O = (0, 0)$) dacă segmentul $[OA]$ nu are puncte interioare aparţinând mulţimii $\mathcal{P}$.

i) Să se arate că punctul $A \in \mathcal{P}$ este vizibil dacă şi numai dacă abscisa şi ordonata sa sunt numere prime între ele.

ii) Să se arate că dacă cercul $\mathcal{C}(O, r)$, cu $r \in \mathbb{N}^*$, conţine puncte vizibile, atunci $r = 4k + 1$, pentru un $k \in \mathbb{N}$.

iii) Să se arate că dacă p este număr prim, atunci cercul $\mathcal{C}(O, p)$ conţine puncte vizibile dacă şi numai dacă $p = 4k + 1$, pentru un $k \in \mathbb{N}^*$.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots a_n \in [0, \infty)$ astfel încât $S := a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Să se arate că $1 + S \leq (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \leq \frac{1}{1-S}$ şi $1 - S \leq (1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n) \leq \frac{1}{1+S}$. Când ating egalităţile?

Clasa a XI-a

Problema 1. Determinaţi toate mulţimile finite $A \subset \mathbb{R}$ care satisfac proprietatea

$$a \in A \implies a^2 - \mid a \mid + 1 \in A.$$