3. Fie triunghiul ABC cu unghiurile a, b, c astfel încât $a < b < c$. Să se arate că

$$\frac{\sin a}{(a-b)(a-c)} + \frac{\sin b}{(b-c)(b-a)} + \frac{\sin c}{(c-a)(c-b)} < 0.$$

Clasa a XII-a

1. Fie matricele $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AC + BD = I_n$ iar $AD = BC$. Demonstraţi că $CA + DB = I_n$ şi $DA = CB$.

Recreaţii Matematice

2. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$, iar $x_0 \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\ln n} = 1$.

3. Considerăm şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi valorile lui n pentru care x_n este număr natural.

Concursul de matematică ,,Gaudeamus"
Ediţia a II-a, Iaşi, 30 octombrie 2010

Clasa a X-a

Problema 1. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi H este ortocentrul său, demonstraţi că $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

2) Se dau: un punct O, un număr strict pozitiv r şi un vector $\overline{u}$. Construiţi trei vectori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ de aceeaşi mărime r, ştiind că suma lor este vectorul dat $\overline{u}$.

Problema 2. Se consideră $\mathcal{P} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mulţimea punctelor de coordonate întregi din plan. Spunem că un punct $A \in \mathcal{P}$ este vizibil (din punctul $O = (0, 0)$) dacă segmentul $[OA]$ nu are puncte interioare aparţinând mulţimii $\mathcal{P}$.

i) Să se arate că punctul $A \in \mathcal{P}$ este vizibil dacă şi numai dacă abscisa şi ordonata sa sunt numere prime între ele.

ii) Să se arate că dacă cercul $\mathcal{C}(O, r)$, cu $r \in \mathbb{N}^*$, conţine puncte vizibile, atunci $r = 4k + 1$, pentru un $k \in \mathbb{N}$.

iii) Să se arate că dacă p este număr prim, atunci cercul $\mathcal{C}(O, p)$ conţine puncte vizibile dacă şi numai dacă $p = 4k + 1$, pentru un $k \in \mathbb{N}^*$.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots a_n \in [0, \infty)$ astfel încât $S := a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Să se arate că $1 + S \le (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \le \frac{1}{1-S}$ şi $1 - S \le (1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n) \le \frac{1}{1+S}$. Când ating egalităţile?

Clasa a XI-a

Problema 1. Determinaţi toate mulţimile finite $A \subset \mathbb{R}$ care satisfac proprietatea

$$a \in A \implies a^2 - \mid a \mid + 1 \in A.$$

Problema 2. Fie triunghiul ABC, vectorii $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ şi punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \lambda\bar{x}$, $\overrightarrow{BN} = \lambda\bar{y}$ şi $\overrightarrow{CP} = \lambda\bar{z}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Se cere locul geometric al centrului de greutate Q al triunghiului (eventual degenerat) MNP, când λ variază.

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ şi $a > 0$ a.î. pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc relaţia

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{(f(x) - f^2(x)}. \tag{1}$$

Să se arate că f este periodică şi să se dea un exemplu de funcţie care verifică (1).

Clasa a XII-a

Problema 1. Se notează cu f_n derivata de ordin n ($n \geq 1$) a funcţiei $(x^2-1)^n$.

a) Calculaţi f_1, f_2 şi f_3.

b) Arătaţi că există exact n valori $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ pentru care $f_n(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

c) Acceptând că are loc relaţia de recurenţă $f_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) f_n(x) + c_n f_{n-1}(x)$, determinaţi coeficienţii a_n, b_n c_n.

Problema 2. Pe o insulă trăieşte un grup de cameleoni de trei culori: 17 sunt roşii, 15 sunt verzi, iar 13 sunt galbeni. Dacă doi cameleoni de culori diferite se întâlnesc, atunci fiecare îşi schimbă culoarea în cea de a treia. Schimbarea culorii unui cameleon se petrece doar în această situaţie.

Se poate să se ajungă la situaţia că toţi cameleonii au aceeaşi culoare?

Problema 3. Fie $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor din $M_n(\mathbb{C})$ de forma

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

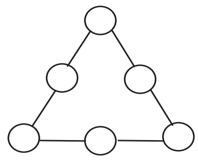
a) Arătaţi că $B \in M_n(\mathbb{C})$ comută cu toate matricele din $\mathcal{M}$ dacă şi numai dacă $B \in \mathcal{M}$.

b) Calculaţi $A(1, 1, 0, \ldots, 0)^n$.

Concursul „Speranţe Olimpice"
Ediţia a X-a, Paşcani, 6 septembrie 2010

Clasa a III-a

1. a) Aranjaţi numerele $10, 20, 30, 40, 50, 60$ în triunghiul alăturat, astfel încât suma de pe fiecare latură să fie 100. Găsiţi cel puţin două posibilităţi.



b) Ştiind că $\Delta + \Delta + 6 = \Delta + \Delta + \Delta + \Delta$, ce cifră ascunde simbolul Δ?

2. a) Copiii au măsurat lungimea terenului de nisip cu paşii.