Concursul "Recreaţii Matematice"

Ediţia a IV-a, Muncel - Iaşi, 28 August 2004

Clasa a VII-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia $x^2 + y^2 - xy + 2x - 2y + 1 = x^2y^2$.

Cătălin Budeanu, Iaşi

2. Să se arate că numărul 4^{999} se scrie în baza 10 cu cel puţin 601 cifre.

Gabriel Popa, Iaşi

3. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{B}) = 60°$, $m(\widehat{C}) = 50°$ şi punctele $M \in (BC)$, $B \in (AN)$ astfel încât $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{BCN}) = 5°$. Dacă I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, să se arate că punctele M, N, I sunt coliniare.

Gheorghe Iurea, Iaşi

4. Fie $ABCD$ un dreptunghi de centru O. Considerăm $N \in (AO)$, M mijlocul lui $[AD]$, $\{P\} = MN \cap CD$, $\{E\} = OP \cap BC$. Să se arate că $NE \perp BC$.

Andrei Nedelcu, Iaşi *(RecMat - 2/2004)*

Clasa a VIII-a

1. Considerăm mulţimile $A = \left\{y \mid y \in \mathbb{R}, y = \dfrac{x - [x]}{x}, x \geq 1\right\}$, $B = \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$. Să se demonstreze că $A = B$.

Vasile Nechita, Iaşi

2. Să se arate că ecuaţia $x^3 + y^5 = t^7$ are o infinitate de soluţii în $(\mathbb{N}^*)^3$.

Artur Bălăucă, Botoşani

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie a, iar P un punct pe segmentul $[AA']$. Determinaţi poziţiile lui P pentru care cu distanţele de la P la planele $(A'BD)$, $(B'BD)$, respectiv $(C'BD)$ se poate construi un triunghi.

Gabriel Popa, Paul Georgescu, Iaşi

4. Fie $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Spunem că un număr natural este *decompozabil* dacă se poate scrie ca suma a două numere cu aceeaşi sumă a cifrelor în baza b. Să se arate că există o infinitate de numere care nu sunt decompozabile.

Adrian Zahariuc, Bacău *(RecMat - 2/2004)*

Clasa a IX-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Determinaţi $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $x^n + y^n = x^{n+1} + y^{n+1} = 1$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

2. Fie $0 < n_i < 144$, $i = 1, 2, \ldots, 12$, douăsprezece numere naturale distincte. Să se demonstreze că mulţimea $S = \{n_1, n_2, \ldots, n_{12}\}$ conţine două submulţimi disjuncte ale căror elemente au aceeaşi sumă.

Cătălin Budeanu, Iaşi

3. Fie $\triangle ABC$ de laturi a, b, c; notăm cu l_a, l_b lungimile bisectoarelor interioare ale unghiurilor $\widehat{A}$, respectiv $\widehat{B}$. Dacă $l_a = a$ şi $l_b = b$, să se calculeze măsurile unghiurilor $\triangle ABC$.

Vasile Nechita, Iaşi

4. Există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$|f(x+y+z+t)+\cos x+\cos y+\cos z+\cos t|<4, \quad \forall x,y,z,t\in\mathbb{R}\ ?$$

Lucian Tuţescu, Craiova *(RecMat - 2/2004)*

Clasa a X-a

1. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $2^{x-1}+2^{x^2-1}=\dfrac{y^2+ay+a^2}{y^2+a^2}$ să aibă soluţii în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Petru Răducanu, Iaşi *(RecMat-1/2004)*

2. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care n^2+n+1 divide $n!$.

Lucian Tuţescu, Craiova

3. Fie $\mathcal{S}_1(O_1,r_1)$, $\mathcal{S}_2(O_2,r_2)$ două sfere, iar $A_i\in\mathcal{S}_1$, $B_i\in\mathcal{S}_2$, $i=\overline{1,4}$ puncte astfel încât A_iB_i, $i=\overline{1,4}$ să fie tangente comune la cele două sfere. Fie M_i mijlocul segmentului $[A_iB_i]$, $i=\overline{1,4}$. Să se determine un punct $P\in O_1O_2$ pentru care suma $PM_1+PM_2+PM_3+PM_4$ să fie minimă.

Gabriel Popa, Paul Georgescu, Iaşi

4. Există triunghiuri pentru care $IH=2004$ şi $GH=2003$? (notaţii clasice)

Lucian Lăduncă, Andrei Nedelcu, Iaşi

Clasa a XI-a

1. *a*) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $a\in\mathbb{R}^*\setminus\operatorname{Im}f'$. Să se arate că pentru orice funcţii $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ecuaţiile

$$g(x)=h(x), \quad (f\circ g)(x)-ag(x)=(f\circ h)(x)-ah(x)$$

au aceleaşi mulţimi de soluţii.

b) Să se rezolve ecuaţia $2x+\sin(\sin x)=3\sin x$.

Silviu Boga, Suceava

2. Se dă cercul $(\mathcal{C})$ şi dreapta (d) tangentă lui. Din punctul M, mobil pe dreapta (d), se duce tangenta MT la cercul $(\mathcal{C})$. Se cere:

a) locul geometric al punctului care împarte segmentul $[MT]$ în raportul k.

b) să se reprezinte grafic acest loc pentru $k=1$.

Gabriel Mîrşanu, Iaşi

3. Fie $k,n,p,q\in\mathbb{N}^*$, n, p, q impare, iar $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Să se demonstreze că $A^{2^k}+pA+qI_n\neq O_n$.

Romeo Ilie, Braşov

4. Fie $k\in\mathbb{N}^*$; să se arate că ecuaţia $x^{n+k}-x^n-x^{n-1}-\cdots-x-1=0$ are o singură soluţie pozitivă (pe care o notăm cu x_n). Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ este convergent şi să se afle limita sa.

Dumitru Mihalache, Marian Tetiva, Bârlad *(RecMat - 2/2004)*

FUNDAŢIA CULTURALĂ "POIANA" (dir. **Dan Tiba**)

a oferit două premii în valoare de câte **1 000 000 lei**, pentru cele mai bune teze de la gimnaziu şi liceu, următorilor elevi:

1. **Hurmuz Daniel**, cl. a VIII-a, *Şcoala nr. 7, Botoşani*,
2. **Săvescu Cristian**, cl. a IX-a, *Colegiul Naţional "Unirea", Focşani.*