Concursul "Recreaţii Matematice"

Ediţia a III-a, Iaşi, 28 August 2003

Clasa a VII-a

1. Rezolvaţi în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuaţia $\dfrac{a}{b+1} + \dfrac{b}{a+1} = 1$.

Alexandru Negrescu, Botoşani (RecMat-2/2003)

2. Un triunghi are două mediane perpendiculare, iar suma lungimilor lor constantă. Să se determine maximul ariei triunghiului.

Mihai Gavriluţ, Roman

3. Fie XOY un unghi oarecare şi P un punct în interiorul lui. Se consideră punctele $A, B \in OX$ cu $A \in (OB)$ şi $C, D \in OY$ cu $C \in (OD)$ astfel încât triunghiurile PAB şi PCD să fie echilaterale. Arătaţi că, dacă dreptele OP, AD, BC sunt concurente, atunci P se află pe bisectoarea unghiului XOY.

Temistocle Bîrsan, Iaşi (RecMat-1/2003)

Clasa a VIII-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat. Arătaţi că există o infinitate de numere $x, y, z \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}$.

Lucian Tuţescu, Craiova (RecMat-1/2003)

2. Găsiţi întregii pozitivi n, x_1, x_2, $\ldots$, x_n astfel încât $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2003$ şi produsul $x_1 x_2 \ldots x_n$ să fie maxim.

Agnes Constantinescu, Harghita

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Cubul este pătat cu cafea pe mai puţin de jumătate din suprafaţa lui totală. Arătaţi că există două puncte pe suprafaţa cubului coliniare cu centrul cubului care nu sunt pătate cu cafea.

Valerica Benţa, Iaşi şi Mugur Roşca, Craiova

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\dfrac{1}{2\sqrt{[x]^3}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{[x+1]^3 \cdot [x]}} = \dfrac{2}{[x] \cdot [x+2]}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.

Daniel Jinga, Piteşti (RecMat-1/2003)

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface

$$\left(n^2 + 3n + 3\right) f(n+2) - 2\left(n^2 + n - 1\right) f(n+1) + \left(n^2 - n + 1\right) f(n) = 0,$$

pentru orice n natural. Ştiind că $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$, calculaţi $f(2003)$.

Andrei Nedelcu, Iaşi

3. Fie pătratul $ABCD$, E mijlocul lui (AB), $M \in (CD)$, $N \in (AD)$ astfel încât $BM \parallel EN$. Să se arate că MN este tangenta cercului $\mathcal{C}(S, r)$ înscris în pătrat.

Nicu Miron, Iaşi

Clasa a X-a

1. Fie $a, b \in (0,1) \cup (1, \infty)$ şi funcţia injectivă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a^x) + f(b^x)$ este constantă. Să se arate că $ab = 1$ şi că există funcţii f care satisfac ipotezele problemei.

Dan Popescu, Suceava (RecMat-1/2003)

2. Să se afle locul geometric al imaginilor numărului complex $z = \dfrac{\sin\alpha + i}{\sin\alpha - i}$, $\alpha \in (0, \pi)$.

Mihai Gavriluţ, Roman

3. Un triunghi de arie S se proiectează pe trei plane perpendiculare două câte două. Dacă ariile proiecţiilor sunt S_1, S_2, respectiv S_3, să se demonstreze că $S \leq S_1 + S_2 + S_3 < S\sqrt{3}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a XI-a

1. Fie D, M două matrice nesingulare de ordin n, D diagonală, iar M triunghiulară. Dacă $D = {}^tMDM$, să se arate că M este tot o matrice diagonală, având ± 1 pe diagonala principală.

Adrian Corduneanu, Iaşi (RecMat-1/2003)

2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere naturale mai mari ca 1. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - y_n}{y_n} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_{x_n} - p_{y_n}}{p_{y_n}} = 0$, unde p_n este al n-lea număr prim.

Gabriel Mîrşanu, Iaşi

3. În tetraedrul $ABCD$ se consideră notaţia $(ab) = m\,[\angle\,(ABC; ABD)]$, corespunzătoare muchiei AB şi analoagele, corespunzătoare la celelalte muchii. Arătaţi că

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos(cd) & \cos(bd) & \cos(bc) \\ \cos(cd) & -1 & \cos(ad) & \cos(ac) \\ \cos(bd) & \cos(ad) & -1 & \cos(ab) \\ \cos(bc) & \cos(ac) & \cos(ab) & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Silviu Boga, Suceava

4. O pată de ulei curge pe un râu. La un moment dat ea intersectează umbra unui fir de telegraf. Să se demonstreze că există un moment în care umbra firului împarte pata de ulei în două porţiuni de aceeaşi arie.

Vlad Martinuşi, Iaşi

Clasa a IX-a (BARAJ)

1. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea

$$xf\left(x^3 + x + 1\right) + f\left(-x^3 + 3x^2 - 4x + 3\right) = x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Silviu Boga, Suceava

2. Se dau mulţimile: $A = \left\{x^2 + x \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \left\{x^3 + x \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$, $C = \left\{x^4 + x^3 + x^2 + x \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$, $D = \left\{2x^4 \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$. Determinaţi mulţimile $A \cap C$, $B \cap D$.

Andrei Nedelcu, Iaşi (RecMat-2/2002)