Concurs de admitere 2003, Iaşi

Facultatea de Informatică, Universitatea "Al. I. Cuza"

Algebră

I. 1. Se dă matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este inelul matricelor pătratice de ordin 3 cu elemente reale, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3 = I_3$ şi că are loc relaţia $(A - I_3)\left(A^2 + A + I_3\right) = 0$.

2. Fie $\sigma \in S_3$ o permutare din grupul simetric de grad 3, astfel încât $\sigma^2 = e$ (e notează permutarea identică). Demonstraţi că există $k \in \{1, 2, 3\}$ astfel încât $\sigma(k) = k$.

3. Demonstraţi că polinomul $P = X^3 + \frac{1}{2}X + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

II. 1. Fie G un grup cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că în orice coloană a tablei operaţiei lui G apar n elemente distincte.

2. Fie $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ inelul numerelor întregi. Determinaţi toate morfismele de inele $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

3. Fie $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ corpul numerelor complexe. Să se arate că $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = \overline{z}$ este izomorfism de corpuri ($\overline{z}$ notează conjugatul numărului complex z).

Analiză matematică

I. 1. Fie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că şirul $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi mărginită. Demonstraţi că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Să se calculeze $f^{(n)}(0)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, iar $f^{(n)}$ notează derivata de ordin n a funcţiei f.

II. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

a) Reprezentaţi grafic funcţia $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f_3(x) - f_2(x)}{f_1(x)}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei g.

b) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia $f_n(x) = 0$ are o unică soluţie reală, u_n, în intervalul $[0, 1]$.

c) Demonstraţi că şirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

d) Să se determine $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

Fac. de Electronică şi Telecomunicaţii, Univ. Tehnică "Gh. Asachi"

1. Rangul termenului din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$ care îl conţine pe a^4 este

a) 8   *b*) 6   *c*) 3   *d*) 4   *e*) 9

2. Suma $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(2^k + 3^k\right)/6^k$ este egală cu

a) $1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}$ *b*) $2 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}$ *c*) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2 \cdot 3^n}$ *d*) $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$

e) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$

3. Se consideră inecuaţia $(m+1)e^{-2x} + 2(m+1)e^{-x} + m > 0$, $x \in \mathbb{R}$, unde $m \in \mathbb{R}$ este un parametru. Valorile lui m pentru care inecuaţia este verificată $\forall x \in \mathbb{R}$ sunt

a) $(-\infty, 0]$ *b)* $[0, +\infty)$ *c)* $[-1, 0]$ *d)* $(0, 1)$ *e)* $(-\infty, -1)$

4. Mulţimea tuturor valorilor $m \in \mathbb{R}$ astfel ca sistemul

$$\begin{cases} mx + y - z = 0 \\ x + (m+1)y + z = 2 + m - m^2 \\ x - 2y - mz = -2 + 3m - m^2 \end{cases}$$

să fie compatibil este

a) $\{2\}$ *b)* $\{-2, -1, 2\}$ *c)* $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ *d)* $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *e)* $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$

5. Numărul complex z, care satisface $|z| + z = \dfrac{10}{2-i}$ este

a) $2 + \frac{3}{2}i$ *b)* $-2 + 5i$ *c)* $\frac{3}{2} - 2i$ *d)* $\frac{1}{2} + 3i$ *e)* $\frac{3}{2} + 2i$

6. Să se determine m astfel ca $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{(1 - \cos x)^m}$ să fie finit şi diferit de zero. Să se precizeze şi valoarea lui l.

a) $m = \frac{3}{4}, l = \frac{2}{3}$ *b)* $m = 3, l = \frac{2}{\sqrt{3}}$ *c)* $m = \frac{3}{2}, l = \frac{\sqrt{2}}{3}$ *d)* $m = \frac{\sqrt{3}}{2}, l = \frac{2}{3}$

e) $m = 2, l = \frac{1}{6}$

7. Mulţimea valorilor funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^2}$ este

a) $\left(-\infty, 1/e^2\right]$ *b)* $(0, \infty)$ *c)* $\mathbb{R}$ *d)* $(0, \sqrt{e})$ *e)* $\left[1/e^2, \infty\right)$

8. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^n + 1 = 0$, atunci valoarea sumei $\dfrac{1}{1-x_1} + \dfrac{1}{1-x_2} + \cdots + \dfrac{1}{1-x_n}$ este

a) $n/2$ *b)* n^2 *c)* n *d)* $n(n+1)$ *e)* $-n$

9. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} \max\left(x - \frac{x^3}{3}, \operatorname{arctg} x\right) dx$.

a) $\operatorname{arctg} 2 + \ln 3$ *b)* $-\frac{5}{12} + 2\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2}\ln 5$ *c)* $\frac{5}{12} - 2\operatorname{arctg} 3$

d) $\frac{5}{11} - 2\operatorname{arctg} 2 + \ln 3$ *e)* $-\frac{5}{12} + \operatorname{arctg} 2$

10. Să se afle soluţia ecuaţiei $\arcsin \dfrac{1}{x-1} + \arcsin \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ *b)* $-\sqrt{3+\sqrt{5}}$ *c)* $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ *d)* $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$ *e)* $\sqrt{1+\sqrt{5}}$

Fac. de Automatică şi Calculatoare, Univ. Tehnică "Gh. Asachi"

1. Să se determine parametrul real m astfel încât ecuaţia $x^2 + 2mx + (m+4) = 0$ să admită rădăcinile reale x_1 şi x_2 verificând $x_1 < 1 < x_2$.

a) $m \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \infty\right)$ *b)* $m \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$ *c)* $m \in \left(-\frac{3}{5}, \infty\right)$

d) $m \in \emptyset$ *e)* $m \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, -\frac{3}{5}\right)$

2. Aflaţi numărul termenilor raţionali din dezvoltarea binomială $\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[5]{3}\right)^{23}$.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4 *e*) 5

3. Fie sistemul

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+ay+2az=b \\ a^2x+a^2y+2a^2z=b^2 \end{cases} \qquad a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0.$$

Care din următoarele afirmaţii este falsă?

a) Dacă $a=0$, sistemul este incompatibil *b*) Dacă $a=b$, sistemul este compatibil nedeterminat *c*) Există $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$ astfel încât sistemul are soluţie unică *d*) Dacă $a\neq 0$ şi $a\neq b$, sistemul este incompatibil *e*) Dacă $a=1$ şi $b\neq 1$, atunci sistemul este incompatibil

4. Fie $M=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ şi legea de compoziţie internă pe M dată prin $x\circ y=3ax+by+xy$, $\forall x,y\in M$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$. Să se afle a şi b astfel încât $(M,\circ)$ să fie grup abelian şi să se precizeze simetricul x' al unui element oarecare $x\in M$.

a) $a=\frac{1}{3}, b=1, x'=\frac{-x}{x+1}$ *b*) $a=1, b=3, x'=\frac{x}{x+1}$ *c*) $a=\frac{1}{3}, b=1, x'=\frac{x}{x+1}$ *d*) $a=1, b=\frac{1}{3}, x'=\frac{-x}{x+1}$ *e*) $a=\frac{1}{3}, b=1, x'=\frac{1}{x+1}$

5. Se dă şirul definit prin relaţia $x_{n+1}=x_n+(-a)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x_1=0$, unde $0<a<1$. Care din următoarele afirmaţii este adevărată:

a) şirul este strict crescător cu limita $+\infty$ *b*) şirul este strict descrescător cu limita $-\infty$ *c*) şirul nu este monoton, dar are limita $\frac{-a}{a+1}$ *d*) şirul este strict crescător cu limita 1 *e*) şirul nu este monoton, deci nu are limită

6. Se dă $f:\mathbb{R}\backslash\{0,2,4,6\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x-4}+\frac{5}{x-6}+\pi$. Numărul punctelor în care graficul funcţiei intersectează axa Ox este

a) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) 3 *e*) 4

7. Fie ecuaţia diferenţială $y'+\frac{1}{x}y=6x$, $x>0$. Să se precizeze intervalul pentru care $y(x)>0$, unde $y(x)$ este soluţia care satisface condiţia $y(1)=1$.

a) $x\in(1,2)$ *b*) $x\in\left(\sqrt[3]{2},\infty\right)$ *c*) $x\in\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\infty\right)$ *d*) $x\in(2,3)$ *e*) $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

8. Se dau triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ ce au centrele de greutate G şi G'. Atunci vectorul $\overrightarrow{GG'}$ este egal cu

a) $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'})$ *b*) $\frac{1}{4}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'})$ *c*) $\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'A'})$ *d*) $\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CB'})$ *e*) $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'})$

9. Să se determine mulţimea punctelor din planul complex care sunt imaginile numerelor z care verifică ecuaţia $z^2-z|z|+|z|^2=0$.

a) două drepte perpendiculare *b*) un cerc cu centrul în origine *c*) două drepte paralele *d*) două semidrepte *e*) două cercuri concentrice

10. Numărul soluţiilor ecuaţiei $\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}=\frac{\pi}{4}$ este

a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4 *e*) o infinitate