Concursul "Recreaţii Matematice"
Ediţia a II-a, Iaşi, 27 August 2002

Clasa a VII-a

1. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ cu $x + y + z = 1$. Să se determine cele mai mici valori pe care le pot lua expresiile
$$E = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}; \quad F = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2.$$

Cornel Noană, Focşani şi Lucian Tuţescu, Craiova

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x = \sqrt{n^2 + n}$.

a) Să se arate că $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ şi să se afle $[x]$.

b) Să se determine primele două zecimale de după virgulă ale lui x pentru $n = 2002^{2002}$.

Cornel Noană, Focşani

3. Fie dat un segment $[MN]$. Construiţi numai cu rigla şi compasul un pătrat $ABCD$ astfel încât $M \in [AB]$, $AM = MB$, iar $N \in [AC]$, $AN = 3NC$. (Descrieţi toate construcţiile care trebuie efectuate.)

Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a VIII-a

1. Dacă suma, produsul şi câtul a două numere iraţionale sunt, fiecare, numere raţionale, calculaţi suma cuburilor celor două numere.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi (Recreaţii Matematice 2/2002)

2. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia $x^2(y+1) + y^2(x+1) + 1 = 0$.

Gabriel Popa, Iaşi

3. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă oarecare. Notăm cu G, G' centrele de greutate ale bazelor, iar $\{D\} = BC' \cap CB'$, $\{E\} = AC' \cap CA'$, $\{F\} = AB' \cap BA'$.Să se arate că dreptele BE, CF şi GG' sunt concurente.

Dan Brânzei, Iaşi

Clasa a IX-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x^n - 3[x] + 2 = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Cornel Noană, Focşani

2. Să se arate că pentru orice $\alpha \in (0, 2\pi)$, există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\sin n\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

3. Fie D_b, D_c, F_a, E_a puncte de tangenţă ale cercurilor exînscrise triunghiului ascuţitunghic ABC cu dreptele suport ale laturilor, astfel încât $B \in (D_cC)$, $C \in (BD_b)$, $B \in (AF_a)$, $C \in (AE_a)$. Să se arate că: $D_cF_a \| D_bE_a \Leftrightarrow \sin^2 \frac{A}{2} = \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a X-a

1. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.

a) Să se arate că dacă toate rădăcinile polinomului sunt reale şi mai mari decât 2, atunci $(-1)^n P(1) + a_{n-1} + 2n \geq 1$.

b) Să se arate că dacă toate rădăcinile polinomului sunt reale, pozitive, mai mici decât 2, atunci $\dfrac{2^n + 2^{n-2}a_{n-2} + 2^{n-4}a_{n-4} + \ldots}{2^{n-1}a_{n-1} + 2^{n-3}a_{n-3} + 2^{n-5}a_{n-5} + \ldots} < -1$.

Carmen Nejneru şi Vlad Martinuşi, Iaşi

2. Să se arate că $\cos\left(n \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}\right) \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

3. Fie A, B două puncte fixate, iar M un punct variabil în plan. Fie A' şi B' imaginile lui M prin rotaţiile în jurul punctului A, respectiv B, de unghi $\dfrac{\pi}{2}$, respectiv $-\dfrac{\pi}{2}$. Dacă vectorul $\overrightarrow{A'B'}$ păstrează aceeaşi direcţie, arătaţi că M parcurge o dreaptă. Reciproca este adevărată?

Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a XI-a

1. Fie $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ două polinoame, fiecare având câte o rădăcină reală. Dacă $P\left(\dfrac{1}{2002} + x + Q^4(x)\right) = Q\left(\dfrac{1}{2002} + x + P^4(x)\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, arătaţi că $P = Q$.

Lucian Tuţescu, Craiova

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât există $m \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 3$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq 1$, pentru care $A^{m+1} - \alpha A^m - \alpha A + I_n = O_n$. Să se arate că $|\det A| = 1$.

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi (Recreaţii Matematice 2/2002)

3. Determinaţi funcţiile continue $f : (0,1) \to (0,\infty)$ pentru care $f(x) \cdot f(y) = f\left(\dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}\right)$, $\forall x, y \in (0,1)$.

Lucian Lazăr, Bacău