Capacitate - teste pregătitoare

Testul 1 (*prof. Gheorghe TIMOHE*)

I. 1. Valorile raţionale ale numerelor x şi y pentru care $x\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+$ $+y\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)=-4\sqrt{2}-\sqrt{3}$ sunt ....

2. Descompusă în produs de doi factori expresia $E(x)=x^2-9y^2-8x+16$ este egală cu ....

3. Fie $E=\left[\frac{99}{98}\right]+\left[\frac{98}{97}\right]+\left[\frac{97}{96}\right]+\left[\frac{96}{95}\right]+\left[\frac{95}{94}\right]+\left[\frac{94}{93}\right]+\left[\frac{93}{92}\right]+\left[\frac{92}{91}\right]+\left[\frac{91}{90}\right]$, unde $[x]$ - partea întreagă a numărului $x\in\mathbb{R}$; atunci $\sqrt{E}=$ ....

4. Soluţia în $\mathbb{N}$ a inecuaţiei $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\,x<2$ este ....

5. Dacă numerele prime x şi y satisfac relaţia $2x+3y=16$, atunci $x=$ ...., $y=$ ....

6. Într-un vas în formă de cub se toarnă 6 l apă, ceea ce reprezintă 75% din capacitatea vasului. Diagonala cubului este egală cu ....

7. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt direct proporţionale cu $6,8$ şi 10, iar diagonala are lungimea de $10\sqrt{2}$ cm. Volumul paralelipipedului este ....

8. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $AB=13$ cm şi $CD=15$ cm, $M\in[AD]$ astfel încât $MD=2MA$ şi $MN\|AB$, $N\in[BC]$.

a) Valoarea raportului $\dfrac{BN}{BC}$ este .... *b*) $MN=$ ....

9. Fie AC şi BC două tangente la un cerc $\mathcal{C}(O,R)$ în A şi B, $m(\angle ACB)=60°$, $AO=8$ cm.

a) $m(\angle AOB)=$ .... *b*) lungimea coardei $AB=$ ....

II. 1. *a*) Reprezentaţi într-un sistem de coordonate carteziene toate perechile (x,y) care verifică relaţiile $|x-1|=3$ şi $|x-y|\leq 3$.

b) Fie $E(x)=(3|x|-1)/|x|$. Determinaţi $x\in\mathbb{R}^*$ pentru care $E(x)\in\mathbb{N}$.

2. Demonstraţi că suma distanţelor de la vârfurile unui triunghi la o dreaptă exterioară lui este egală cu suma distanţelor de la mijloacele laturilor triunghiului la aceeaşi dreaptă.

3. Pe planul pătratului $ABCD$ de latură a se ridică perpendiculara $OA=a\sqrt{2}$. Fie M şi N proiecţiile lui A pe (OBC) şi (OCD), iar P şi L proiecţiile lui M şi A pe (AOD), respectiv MH. Să se determine: *a*) MP şi AL; *b*) unghiul diedru al planelor (AMH) şi (ABC); *c*) poziţia punctului Q pe OC astfel încât perimetrul $\triangle OBD$ să fie minim.

Testul 2 (*prof. Gheorghe TIMOHE*)

I. 1. Propoziţia "$\forall n\in\mathbb{N}$, $n(n+3)+3$ este număr prim" este ....

2. Fie $S=\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{101}+\cdots+\dfrac{1}{299}$. Dintre S şi $\dfrac{2}{3}$ este mai mare ....

3. Soluţiile ecuaţiei $||3x-1|-12|=4$ sunt ....

4. *a*) Dacă $0<b<a$, atunci $\left(\sqrt{ab},a\right)\cap(b,(a+b)/2)=$ ....

b) Dacă $A=\left(2^{1999},2^{2000}\right)\cap\mathbb{Z}$, atunci $card\ A=$ ....

5. Rezolvând sistemul $\begin{cases}|x+2|+|y-3|=7\\|x+2|+3=y-3\end{cases}$, obţinem $(x,y)\in$ ....

6. Fie $ABCD$ - trapez de baze $AB=7$ cm, $CD=2$ cm şi laturile neparalele

$BC = 4$ cm şi $AD = 3$ cm. Măsura unghiului dintre AD şi BC este egală cu .... grade.

7. Fie $ABCDA'B'C'D'$ - cub. Atunci $m(\angle(A'C', AD')) =$ ....

8. Aria $\triangle ABC$ este 268 cm^2. Aria triunghiului format de mijloacele laturilor sale este ....

9. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\angle A) = 60°$, $m(\angle B) = 80°$, $(AA', (BB', (CC'$ - bisectoarele unghiurilor $\triangle ABC$ (A', B', C' aparţin cercului circumscris $\triangle ABC$).

a) $m(\angle B'C'A') =$ .... *b*) $m(\angle A'B'C') =$ ....

II. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 1$.

a) Calculaţi aria suprafeţei determinată de graficele funcţiilor şi Ox.

b) $A = \left\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x + y) \leq f\left(2\sqrt{xy}\right)\right\}$. Reprezentaţi grafic elementele lui A.

c) $B = \left\{n \in \mathbb{N} \mid |g(n)| \leq 8\sqrt{2}\right\}$. Determinaţi suma elementelor din B.

2. Fie numerele $a = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\ldots\left(\sqrt{100}+\sqrt{99}\right)\left(\sqrt{101}-\sqrt{100}\right)$ şi $b = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\ldots\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)\left(\sqrt{101}+\sqrt{100}\right)$.

a) Arătaţi că $a + b > 2$. *b*) Comparaţi numerele $(1 - a)(1 + b)$ şi $b - a$.

3. Tetraedrul $ABCD$ se secţionează cu un plan α paralel cu muchiile $[AB]$ şi $[CD]$, $AB = a$, $CD = b$. Planul α intersectează muchiile $[BD], [BC], [AD], [AC]$ în N, M, P şi respectiv Q.

a) Demonstraţi că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) Dacă $\dfrac{BM}{MC} = x$, $x > 0$, exprimaţi aria paralelogramului $MNPQ$ în funcţie de a, b, x şi măsura unghiului dintre AB şi CD.

c) Determinaţi poziţia punctului $M \in [BC]$ pentru care aria paralelogramului $MNPQ$ este maximă.

Testul 3 (*prof. Lidia BOSÂNCIANU*)

1. Cel mai mic număr natural nenul divizibil cu 88 şi care poate fi scris ca produsul a trei numere naturale consecutive este ....

2. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, şi $cd = 1$, valoarea minimă a expresiei $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd + 14$ este ....

3. Numerele $5 - x$, $2x + 3$ şi $5x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, reprezintă lungimile laturilor unui triunghi. Atunci $x \in$ ....

4. Ecuaţiile $(m-1)^2(x+2)+9 = (m-1)^2 - 3(m-1)(x+2)$, $(m-1)^2(x+1) = 3(3x + m + 5)$, $m \in \mathbb{R}$ sunt echivalente dacă m ....

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2|x| - f(-1) - 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(x) =$ ....

6. Fie $ABCD$ un dreptunghi, $MA \perp (ABC)$, N mijlocul lui (BC), $MB = BD = 6$ cm şi $MD = 4\sqrt{3}$ cm, atunci $d(M, DN) =$ ....

7. Fie $\triangle ABC$ oarecare, $M \in (BC)$ astfel încât $MC = \dfrac{1}{3}BC$, $N \in AC$ astfel încât $AN = \dfrac{1}{4}AC$, iar $AM \cap BN = \{P\}$. Atunci $\dfrac{AP}{PM} =$ ....

8. $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu perimetrul bazei 28 cm. Dacă diagonala paralelipipedului are lungimea de 20 cm şi formează cu o muchie laterală un unghi cu măsura de 30°, *volumul* $[ABCDA'B'C'D']$ este ....

9. Fie un con circular drept cu secţiunea axială un triunghi isoscel cu baza 8 cm şi perimetrul 18 cm.

a) Măsura unghiului corespunzător sectorului de cerc obţinut prin desfăşurarea conului este ....

b) Volumul conului este ....

II. 1. Să se găsească ultimele două cifre ale numărului

$$A=\left[\left(2^{2n}+2^{2n+1}+2^{2n+2}+2^{2n+3}\right)\cdot 4^{2n}+\left(4^{2n}+4^{2n+1}+4^{2n+2}+4^{2n+3}\right)2^{n}\right]\cdot 8^{n}-$$
$$-\frac{2^{2n+1}+2^{2n+3}}{4^{n}+4^{n+1}},\, n\in\mathbb{N}^*.$$

2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ cu $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left(x_1+\sqrt{x_2}+1\right)\left(x_2+2\sqrt{x_2}+1\right)\ldots\left(x_n+n\sqrt{x_n}+1\right)>3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n\,(n+1)\,(n+2)\,.$$

3. $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată având toate muchiile de lungime a. Fie Q mijlocul lui (CV) şi $(\mathcal{C})$ cercul înscris în triunghiul VBC.

a) Să se arate că $(BDQ)\perp(VBC)$.

b) Dacă M este un punct oarecare pe $(\mathcal{C})$ şi $N\in(BD)$, să se determine lungimea minimă posibilă pentru (MN).

Testul 4 (*prof. Lidia BOSÂNCIANU*)

1. Fie $a=2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\cdots\cdot 2^{100}-\left(16^2\right)^{631}$. Atunci $a=$ ....

2. Ştiind că $6\left(3^a+\overline{bb}\right)+2^c=493$, atunci $\overline{abc}=$ ....

3. Dacă $\dfrac{a-13}{b}=\dfrac{a}{b+7}$, $a,b\in\mathbb{N}^*$, atunci cea mai mare valoare pentru $\dfrac{a}{b}$ este ....

4. Mulţimea $A=\left\{\overline{ab}\in\mathbb{N}\mid\sqrt{\left(\overline{ab}+36\right)/\left(\overline{ab}-36\right)}\in\mathbb{N}\right\}=$ ....

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x-1)=-3x+1-f(2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Atunci $f(x)=$ ....

6. Fie M mijlocul laturii (AB) a dreptunghiului $ABCD$, $MN\perp AC$, $N\in(AC)$ şi $8MN=AC$. Atunci $m(\widehat{BAC})=$ ....

7. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{B})-m(\widehat{C})=40^\circ$. Fie $AD\perp BC$ şi $(AE$ bisectoarea lui $\widehat{BAC}$, $D,E\in(BC)$. Dacă $(AD$ şi $(AE$ împart $\widehat{BAC}$ în trei unghiuri cu măsurile direct proporţionale cu $1,2,3$, atunci măsurile unghiurilor $\triangle ABC$ sunt ....

8. Într-un cilindru cu diametrul de 4 cm şi înălţimea de 25 cm se aşează nişte bile cu raza de 20 mm.

a) Care este numărul maxim de bile ce încap în cilindru?

b) Câte procente din volumul cilindrului ocupă bilele?

9. Într-o piramidă patrulateră regulată, secţiunea diagonală este un triunghi dreptunghic isoscel. Atunci $A_t/A_l=$ ....

II. 1. Fie $a,b\in\mathbb{Z}$. Arătaţi că $\left|a-b^2\right|+a^2+a=0\Longleftrightarrow a=b=0$.

2. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia $y=\dfrac{x_2x_3\ldots x_n+x_1x_3\ldots x_n+\cdots+x_1x_2\ldots x_{n-1}}{x_1x_2\ldots x_n\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)}$.

3. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic isoscel, $(AB)\equiv(AC)$ şi $AB=a$. Se duce $CS\perp(ABC)$, $CS=a$.

a) Calculaţi aria totală şi volumul piramidei $SABC$ în funcţie de a.

b) Aflaţi $m(\widehat{(SAB),(ABC)})$.

c) Dacă $CP\perp SB$ şi Q este mijlocul muchiei (SA), să se demonstreze că patrulaterul $ABPQ$ este inscriptibil.