Concurs de admitere 2002, Iaşi

Facultatea de Informatică, Universitatea "Al. I. Cuza"

Analiză matematică

1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale.

i) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către a şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către b, ce se poate spune despre convergenţa şirului $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$? Să se justifice răspunsul dat.

ii) Dacă $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ şi $b_n = (-1)^{2n+1} + \sqrt[n+2]{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, să se studieze convergenţa şirului $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$.

2. Fie funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$. Să se arate că:

i) $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$, $\forall x_1, x_2 \in [-1,1]$, $x_1 \neq x_2$;

ii) există un singur $x_0 \in (-1,1)$, astfel încât $f(x_0) = x_0$.

Algebră

1. Fie $(G,*)$ şi $(\Gamma,\circ)$ două grupuri. Să se demonstreze că dacă $f : G \to \Gamma$ este izomorfism, atunci şi $f^{-1} : \Gamma \to G$ este izomorfism.

2. Fie dat $q \in \mathbb{Q}^*$. Să se arate că:

i) funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f(k) = q^k$, este morfism de la grupul $(\mathbb{Z},+)$ la grupul $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$;

ii) dacă $q \notin \{-1,1\}$, atunci există un subgrup al lui $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ izomorf prin f cu $(\mathbb{Z},+)$. Să se precizeze acest subgrup.

3. Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = \widehat{1} \oplus X \oplus X^2 \oplus \cdots \oplus X^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că f se divide prin $X \oplus \widehat{2}$, dacă şi numai dacă n este multiplu al lui 3.

4. Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ şi respectiv $\mathbb{C}$, polinomul $g = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$, ştiind că g se divide prin $X - \alpha$, unde α este o rădăcină de ordinul trei a unităţii.

Algebră - colegiu

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $t(A)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricii A şi $\det(A)$ determinantul matricii A. Să se arate că:

i) $A^2 - t(A)\cdot A + \det(A)\cdot I_2 = O_2$, unde I_2 şi O_2 sunt matricea unitate şi respectiv matricea nulă din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

ii) dacă $A^2 = O_2$, atunci $t(A) = 0$.

2. *i)* Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Să se scrie explicit toţi termenii care apar în expresia determinantului matricii A şi care sunt de forma $(-1)^{i+j+1} a_{1i}a_{23}a_{3j}$.

ii) α fiind un parametru real, să se discute şi să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1 \\ -4x + 6y + 2z = -2\alpha \end{cases}.$$

3. Fie $H = \left\{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 - 2y^2 = 1\right\}$. Arătaţi că H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulţirea şi că toate elementele lui H sunt simetrizabile în raport cu operaţia indusă.

4. Să se determine polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, de gradul 1, astfel încât

$$\left(X^2 + 2X + 2\right)\cdot f + \left(X^2 + 3X + 3\right)\cdot g = 1.$$

Fac. de Electronică şi Telecomunicaţii, Univ. Tehnică "Gh. Asachi"

Matematică

1. Ce relaţie există între numerele reale $A = n^{\sqrt{n+1}}$ şi $B = (n+1)^{\sqrt{n}}$, $n \geq 8$?
a) $A > B$; *b)* $A = B$; *c)* $A < B$; *d)* $A \geq B$; *e)* $A \leq B$.

2. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $C_{16}^{k-2} > C_{16}^{k}$ este
a) $\{4, 5, \ldots, 9\}$; *b)* $\emptyset$; *c)* $\{17, 18, 19\}$; *d)* $\{10, 11, \ldots, 16\}$; *e)* $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

3. Fie inecuaţia $\log_x \sqrt{x+30} \geq 1$. Soluţiile acestei inecuaţii sunt
a) $x \in (-\infty, -5]$; *b)* $x \in [6, \infty)$; *c)* $x \in (1, 6]$; *d)* $x \in (1, \infty)$; *e)* $x \in \emptyset$.

4. Fie $I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}$, $a \in \mathbb{R}$ şi $L = \lim_{a \to 2} I(a)$. Atunci:
a) $L = 2$; *b)* $L = 2\ln 2$; *c)* $L = 4\ln 2$; *d)* $L = 8\ln 2$; *e)* $L = \ln 2$.

5. Sistemul $\begin{cases} \alpha x + \beta y + 2z = 1 \\ \alpha x + (2\beta - 1) y + 3z = 1 \\ \alpha x + \beta y + (\beta + 3) z = 2\beta - 1 \end{cases}$ cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ este compatibil nedeterminat pentru
a) $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = -1$; *b)* $\alpha = 0, \beta = 5$ sau $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 1$; *c)* $\alpha = 0, \beta = 2$;
d) $\alpha = 0, \beta = -1$ sau $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 5$; *e)* $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$.

6. Să se afle soluţiile ecuaţiei $\frac{\sin^2 x}{\cos x(1 + \operatorname{tg} x)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x(1 + \operatorname{ctg} x)} = \sqrt{2}$.
a) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$; *b)* $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$; *c)* $x \in \emptyset$; *d)* $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$; *e)* $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Numărul complex $\frac{(1+i)^{2002}}{(1-i)^n}$ este real pentru $n \in \mathbb{N}$ de forma
a) $n \in \mathbb{N}$; *b)* $n = 4k$; *c)* $n = 4k+1$; *d)* $n = 4k+2$; *e)* $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$.

8. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^{2n} - X^n + X^4 + 1$, $g = (X-1)^2$. Să se determine restul r al împărţirii polinomului f la polinomul g.
a) $r = (n+4)X - n - 2$; *b)* $r = nX$; *c)* $r = (n+2)X + n - 1$;
d) $r = (n+4)X + n - 2$; *e)* $r = 2nX$.

9. Se consideră funcţia f care satisface relaţia: $2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) + f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Valoarea derivatei $f^{(n)}(-2)$ este
a) $(-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$; *b)* $\frac{n!}{3^{n+1}}$; *c)* $(-1)^n \frac{n!}{2 \cdot 3^n}$; *d)* $(-1)^n \frac{n!}{3^n}$; *e)* $\frac{n!}{3^n}$.

10. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^n + 1}{x^3 + 1}$, $n \in \mathbb{N}$, are cel puţin o asimptotă verticală şi nu admite asimptote orizontale sau oblice pentru
a) $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$; *b)* $n \in \mathbb{N}$; *c)* $n < 4$; *d)* $n = 4$; *e)* $n = 2k$, $k \geq 3$.

Fac. de Automatică şi Calculatoare, Univ. Tehnică "Gh. Asachi"

Matematică - ingineri

1. Valorile parametrului real a pentru care rădăcinile x_1, x_2 ale ecuaţiei $8ax^2 - 2(a^2 + 2a + 1)x + a^2 + 1 = 0$ satisfac $x_1 + x_2 \leq 4x_1 x_2$ sunt:
a) $a > 0$; *b)* $a = 0$; *c)* $a = -1$; *d)* $a = 1$; *e)* $a \neq 2$.

2. Fie polinoamele $f = X^{2n} - X^n + X^4 + 1$, $n > 4$ şi $g = (X-1)^2$. Să se determine restul împărţirii lui f la g.

a) $(n+4)\,X-n-2$; *b)* $nX+n-2$; *c)* $(n+2)\,X-n-2$;
d) $(n+4)\,X+n-2$; *e)* $(n-4)\,X+n-2$.

3. Dacă a este o rădăcină a ecuaţiei $x^2+x+1=0$ şi $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&a^2&a\end{pmatrix}$ atunci:

a) $A^2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix}$; *b)* $A^2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$; *c)* $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$;
d) $A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&2\\2&0&2\end{pmatrix}$; *e)* $A^2=\begin{pmatrix}3&3&0\\0&3&3\\3&0&3\end{pmatrix}$.

4. Legea de compoziţie $x*y=\dfrac{1}{2}\,(x+y-xy+1)$ este o lege de grup comutativ pe mulţimea:
a) $\mathbb{R}$; *b)* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$; *c)* $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$; *d)* $\mathbb{R}\backslash\{1\}$; *e)* $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

5. Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n+n}\right)$.
a) $\ln 2$; *b)* $\ln\dfrac{3}{2}$; *c)* $\dfrac{\pi}{2}$; *d)* $\dfrac{1}{2}e$; *e)* $1+\ln\dfrac{3}{2}$.

6. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\backslash\{-2\}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x+m}{x+2}e^{-x}$, în care m este parametru real. Să se precizeze valorile lui m pentru care f are două puncte de extrem.
a) $m\in[2,6]$; *b)* $m\in(-\infty,2/3]$; *c)* $m\in(2/3,6)$; *d)* $m\in(-\infty,2)\cup(6,\infty)$;
e) $m\in(-\infty,2/3)\cup(6,\infty)$.

7. Să se determine parametrul a, astfel încât să avem $1<\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+a}{x^2+3}dx<2$.
a) $3<a<3+\dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}$; *b)* $3-\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}<a<3$; *c)* $3<a<3\left(1+\dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)$;
d) $3-\dfrac{\pi}{6}<a<\pi$; *e)* $3<a<\dfrac{7\sqrt{\pi}}{2}$.

8. Se dă un triunghi de arie S şi de laturi a,b,c. Fie M,N,P proiecţiile centrului cercului înscris pe laturi. Se cere aria $\triangle MNP$.
a) $\dfrac{a+b+c}{3abc}S^2$; *b)* $\dfrac{abc\,(a+b+c)}{16S}$; *c)* $\dfrac{S^2\sqrt{3}}{3abc}$; *d)* $\dfrac{3S^2\sqrt{3}}{(a+b+c)^2}$; *e)* $\dfrac{4S^3}{abc\,(a+b+c)}$.

9. Să se rezolve ecuaţia $\sin(2x+1)=\cos(2x-1)$.
a) $\pm\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}$; *b)* $\pm\dfrac{\pi}{8}+k\pi$; *c)* $\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}$; *d)* $(-1)^k\,\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}$; *e)* $(-1)^k\,\dfrac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

10. Unghiul diedru dintre două feţe adiacente ale unui octaedru regulat are măsura, exprimată în radiani, egală cu:
a) $\dfrac{\pi}{2}$; *b)* $\dfrac{2\pi}{3}$; *c)* $\dfrac{5\pi}{8}$; *d)* $2\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; *e)* $2\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Matematică - colegiu

1. Soluţiile sistemului $\begin{cases}xy+x+y=11\\x^2y+xy^2=30\end{cases}$ sunt:

a) $(x,y)\in\{(-2,3),(-3,2)\}$; *b)* $(x,y)\in\{(1,-5),(-5,1)$; *c)* $(x,y)\in\{(2,3),(1,5)\}$; *d)* $(x,y)\in\{(3,2),(5,1)\}$; *e)* $(x,y)\in\{(2,3),(3,2),(1,5),(5,1)\}$.

2. Să se rezolve inecuaţia $\log_2(9-2^x)>3-x$.

a) $x<8$; *b)* $0<x<3$; *c)* $2<x<4$; *d)* $x>3$; *e)* nu există soluţii.

3. Dacă matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ satisface $A^3=aA^2+bA$, atunci:

a) $(a,b)=(3,2)$; *b)* $(a,b)=(3,3)$; *c)* $(a,b)=(2,2)$; *d)* $(a,b)=(3,-2)$; *e)* $(a,b)=(-2,3)$.

4. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $*$ prin relaţia: $x*y=xy+ax+2by+1$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât legea să fie comutativă şi asociativă.

a) $a=1,b=\frac{1}{2}$; *b)* $a=0,b=0$ sau $a=1,b=\frac{1}{2}$; *c)* $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},b=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ sau $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2},b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$; *d)* $a=4,b=2$; *e)* nu există soluţie.

5. Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{n+2}\ln\frac{n+1}{n}}$.

a) $\frac{1}{2}$; *b)* 1; *c)* e; *d)* $\sqrt{e}$; *e)* ∞.

6. Se consideră funcţia $f(x)=\frac{x^2+mx+2}{x^2+2x+m}$, unde $m\in\mathbb{R}$ este un parametru. Să se determine m, astfel încât domeniul ei de definiţie să fie $\mathbb{R}$ şi să admită exact două puncte de extrem.

a) $m\in(1,2)\cup(2,\infty)$; *b)* $m\in(2,\infty)$; *c)* $m\in(-3,\infty)$; *d)* $m\in(1,2)$; *e)* $m\in(-\infty,1)$.

7. Să se calculeze $\int\frac{xdx}{(x+a)^{3/2}}$, $x\in(-a,\infty)$ $(a\neq 0)$.

a) $2\left(\sqrt{x+a}-\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)+C$; *b)* $2\left(\sqrt{x+a}-\frac{a}{\sqrt{x+a}}\right)+C$; *c)* $\frac{x-2a}{\sqrt{x+a}}+C$; *d)* $\frac{2}{3}\frac{x+a+1}{\sqrt{x+a}}+C$; *e)* $2\frac{x+2a}{\sqrt{x+a}}+C$.

8. Într-un patrulater convex se cunosc diagonalele d_1,d_2 şi un unghi α dintre ele. Se cere aria patrulaterului ale cărui vârfuri sunt mijloacele laturilor celui dat.

a) $\frac{1}{4}d_1d_2\cos\alpha$; *b)* $\frac{1}{4}d_1d_2\sin\alpha$; *c)* $\frac{1}{4}\left(d_1^2+d_2^2-d_1d_2\right)\sin\alpha$; *d)* $\frac{1}{4}d_1d_2(\sin\alpha+\cos\alpha)$; *e)* $\frac{1}{16}(d_1+d_2)^2\sin\alpha$.

9. Se dau numerele $x=\cos 3$, $y=\operatorname{tg}3$, $z=\operatorname{ctg}3$. Atunci

a) $x<y<z$; *b)* $y<x<z$; *c)* $z<y<x$; *d)* $x<z<y$; *e)* $z<x<y$.

10. Locul geometric al centrelor sferelor ce trec prin două puncte distincte date este

a) o sferă; *b)* o dreaptă; *c)* două drepte perpendiculare; *d)* un plan; *e)* două plane perpendiculare.