# Bacalaureat - teste pregătitoare

***Gabriel MÎRŞANU*** [1]

**Testul 1**

**I.** **1. a)** Se consideră funcţiile $f : A \to B,\quad g : B \to C$ unde $A, B, C$ sunt submulţimi ale lui **R**. Să se arate că:

(i) dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci $f$ este injectivă;

(ii) dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci $g$ este surjectivă.

**b)** Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie cu proprietatea $(f \circ f)(x) = x^2, \forall x \in (0, \infty)$.

Să se arate că :

(i) $f$ este o funcţie bijectivă;

(ii) $f(x^2) = f^2(x), \quad \forall x \in (0, \infty)$;

(iii) $\sqrt{f(x)} = f(\sqrt{x}), \quad \forall x \in (0, \infty)$.

**2.** Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin : $x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 - x_n}$ .

**a)** Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_{2n})_{n\geq 0}$ .

**b)** Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ .

**c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ .

**3.** Fie elipsa de ecuaţie : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ .

**a)** Să se arate că dreapta $y = mx + n$ este tangentă elipsei dacă şi numai dacă $n = \pm\sqrt{a^2 m^2 + n^2}$ .

**b)** Să se determine locul geometric al punctelor din plan din care se pot duce tangente perpendiculare la elipsă.

**II.** **1.** Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & x^4 \end{vmatrix}$ , unde $a, b, c, x \in$ **R.**

**a)** Dezvoltaţi determinantul după coloana a patra punând rezultatul sub forma unui polinom $p(x)$.

**b)** Determinaţi coeficientul dominant şi rădăcinile polinomului $p(x)$.

**c)** Scrieţi polinomul sub formă de produs.

**2.** Fie funcţia continuă $f : [a, b] \to$ **R**. Să se arate că pentru orice cuplu de numere reale pozitive $\alpha, \beta$ se poate determina un număr $c \in [a, b]$ , astfel încât

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c) \textbf{.}$$

---

[1] Profesor, Liceul Teoretic " Gr. Moisil ", Iaşi

**III.** Fie $G=(-k,k)$, unde $k\in\mathbf{R}$, $k>0$. Pe $G$ se defineşte o operaţie: $(x,y)\to x*y=\dfrac{k^2(x+y)}{k^2+x\cdot y}$.

**a)** Arătaţi că $(G,*)$ este grup abelian.

**b)** Arătaţi că funcţia $f:G\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{k+x}{k-x}$ este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbf{R},+)$.

**IV.** **a)** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă principală $T$. Să se arate că

$$\int_a^{a+nT} f(x)\,dx = n\cdot\int_0^T f(x)\,dx,\ \forall\, a\in\mathbf{R} \text{ şi } n\in\mathbf{N}.$$

**b)** Folosind punctul **a)**, să se calculeze :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{-1+\varepsilon}^{1+\varepsilon}\frac{|\sin n\arccos x|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

## Testul 2

**I.** **1.** Se dă o mulţime $A$ care are $n$ elemente. Împărţim toate submulţimile lui $A$ în clase (disjuncte), punând în aceeaşi clasă toate submulţimile lui $A$ care au acelaşi număr de elemente. Care dintre aceste clase este cea mai numeroasă ?

**2.** Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{1,2\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ şi $a_n=n^2\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(n+3)$.

**a)** Să se determine determine derivata de ordin $n$ a lui $x$.

**b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

**3**. Se consideră punctele $A(-2,1)$, $B(2,-1)$, $C(-1,8)$.

**a)** Să se calculeze perimetrul triunghiului $ABC$.

**b)** Să se determine coordonatele punctului $D$, al patrulea vârf al paralelogramului $ABCD$, pentru care $BC$ este o diagonală.

**c)** Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului $ABC$.

**II.** **1.** Fie familia de funcţii de gradul al doilea :

$$f_m(x)=(m+1)x^2-mx+1,\ ,\ \mathrm{M}\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$$

**a)** Să se arate că parabolele asociate acestor funcţii trec prin două puncte fixe.

**b)** Să se determine locul geometric al punctelor descris de vârfurile parabolelor.

**2.** Să se determine o primitivă a funcţiei $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$.

**III.** Fie polinomul $f\in\mathbf{Z}_6[X]$, $f=\hat{4}x^4+\hat{2}x^3+\hat{2}x^2+\hat{4}x+\hat{3}$.

**a)** Să se arate că $f$ nu admite rădăcini în $\mathbf{Z}_6$.

**b)** Să se arate că $f$ se poate descompune în produsul a două polinoame, din care unul de gradul întâi.

**IV.** Fie funcţia $f:D\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{vmatrix} |x| & \ln|x| & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & \ln|x| \end{vmatrix}$.

**a)** Să se determine domeniul maxim de definiţie $D$ şi apoi să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei $f$.

**b)** Să se arate că restricția lui $f$ la $(0,\infty)$ este bijectivă şi apoi să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(0), \left(f^{-1}\right)''(0)$.

**c)** Să se determine primitivele lui $f$ pe **R***.

**d).**Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ şi dreptele $x=1$, $x=3$.

## Testul 3

**I.** **1**. Să se rezolve inecuația : $2^{3x}+8^{-x}+3\cdot 2^{x}-8+3\cdot 2^{-x}\le 0$.

**2**. Fie $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$ şi $S(x)=x+x^2+\ldots+x^n$.

**a)** Să se calculeze $S(x)$ şi $S'(x)$.

**b)** Folosind **a)** să se calculeze $T(x)=x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n$.

**c)** Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\ge 1}$ cu $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$.

**II.** **1.** Fie $\mathrm{M}$ mulțimea matricilor de tipul $(m, n)$ în care toate elementele sunt egale cu 1 sau $(-1)$ şi astfel încât produsul numerelor din fiecare linie, respectiv coloană să fie egal cu $(-1)$. Să se calculeze numărul de elemente al mulțimii $\mathrm{M}$.

**2. a)** Enunțați *teorema lui Lagrange*.

**b)** Aplicați *teorema lui Lagrange* funcției $f:[e,\pi]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x$.

**c)** Demonstrați inegalitatea : $e^{\pi}>\pi^{e}$.

**III.** **1**. Fie $G=\left\{f_\alpha:(b,\infty)\to R \;\middle|\; f_\alpha(x)=b+(x-b)^{\alpha},\ \alpha\in R^*, b>0\right\}$.

**a)** Să se arate că $(G,\circ)$ este grup abelian.

**b)** Să se demonstreze că $(G,\circ)\cong(R,\cdot)$.

**2**. Fie $P\in Z[X]$ un polinom pentru care $P(0), P(1)$ sunt impare. Să se arate că ecuația $P(x)=0$ nu are rădăcini întregi.

**IV.** **1**. Fie funcția $f: I\to\mathbf{R}$, $I$ interval inclus în **R** $a\in I$ şi funcția $f$ este derivabilă în $a$.

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n\left[f(a+\frac{1}{n})+f(a+\frac{2}{n})+\cdots f(a+\frac{k}{n})-kf(a)\right]$, unde $k\in\mathbf{N}^*$ este fixat.

**2**. Fie şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ cu termenul general $a_n=\int_0^1 x(1-x)^n dx$, $n\in\mathbf{N}^*$.

**a)** Să se determine $a_n$.

**b)** Să se calculeze $b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$.

**c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} b_n$.

## Testul 4

**I.** **1**. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ un şir de numere reale nenule. Să se arate că acest şir este o progresie aritmetică , dacă şi numai dacă pentru orice $n\ge 2$ , avem relația :

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}x_n}=\frac{n-1}{x_1x_n}.$$

**2**. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = n\pi - 2n\, arctgn$.

**a)** Să se arate că $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton şi mărginit.

**b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**3**. Să se demonstreze că produsul distanțelor unui punct oarecare al hiperbolei $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, la cele două asimptote, este egal cu $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

**II.** **1.** Determinați părțile stabile finite ale lui **Z** în raport cu înmulțirea. Este **R****Q** parte stabilă a lui **R** în raport cu adunarea, respectiv cu înmulțirea ?

**2.** Fie funcția $f:[0,x]\to \mathbf{R}$, $f(x)=\int_0^x \ln\frac{1-t}{1+t}\,dt,\quad x\in(0,1)$.

**a)** Să se calculeze $f'(x)$.

**b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\arcsin x^2}$.

**III.** Fie $(G,\cdot)$ şi $(G,\cdot')$ două grupuri, $f:G\to G'$ un morfism de grupuri şi mulțimea $\operatorname{Ker} f=\{x\in G \mid f(x)=e'\}$, $e'$ fiind elementul neutru al lui $G'$.

**a)** Să se arate că Ker$f$ este subgrup al lui $G$.

**b)** Să se arate că morfismul $f$ este injectiv dacă şi numai dacă Ker$f$={e}.

**IV.** **1.** Fie funcția $g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $g(x)=\begin{cases} x^3, & x\in[0,1]\setminus\{1,\frac{1}{2},\ldots\frac{1}{n}\} \\ 3^x, & x\in\{1,\frac{1}{2},\ldots\frac{1}{n}\}\end{cases}$ $n\in\mathbf{N}^*$.

Să se arate că $g$ este integrabilă pe [0, 1] şi să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

**2**. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{p}{x}-\frac{\ln x}{x}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

Să se calculeze $S(m)$, aria suprafeței mărginită de graficul funcției $f$, axa $Ox$, şi dreptele $x$=1 , $x$=$m$ ($m$ >1). Să se determine $m$, astfel încât $S(m)=p\ln m-1/2$.

<u>**Testul 5**</u>

**I.** **1.** Fie şirul de numere complexe $(z_n)_{n\geq 1}$ definit prin $z_1=-i, z_2=i, z_n-z_{n-1}=q(z_{n-1}-z_{n-2})$ pentru $n\geq 2$, $q$ fiind un număr complex dat diferit de 1.

**a)** Calculați $z_3$ şi $z_4$.

**b)** Arătați că $z_n - z_{n-1} = 2iq^{n-2}$ şi deduceți că $z_n - z_1 = 2\,i\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$.

**c)** Arătați că afirmațiile “ $z_n=-i$ ” şi “$q$ este rădăcină de ordinul $n$-1 a unității sunt echivalente.

**2**. **a)** Definiți noțiunea de punct de inflexiune al unei funcții și dați interpretarea geometrică.

**b)** Să se determine punctele de inflexiune ale funcției : $f$ : **R**→**R**, $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}$.

**3**. Fie elipsa (E) : $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}-1=0$.

**a)** Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsă, duse din punctul $A(-16, 9)$.

**b)** Dacă se notează cu $T_1$, $T_2$ punctele de contact ale celor două tangente de la punctul **a)** cu elipsa (E) , să se determine ecuația dreptei $T_1T_2$.

**c)** Calculați distanța de la punctul A la dreapta $T_1T_2$.

**II.** **1**. **a)** Rezolvați în **R** inecuatia $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}>\dfrac{3}{4}$.

**b)** Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea $\left(\dfrac{6}{7}+\dfrac{1}{7}\right)^{2002}$.

**2**. **a)** Arătați că funcția $f$: **R**→**R**, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in R\setminus Q\end{cases}$ nu admite primitive pe **R**.

**b)** Găsiți o funcție $g$ : **R**→**R** care nu admite primitive pe **R** , astfel încât funcția compusă $f\circ g$ să admită primitive pe **R** ($f$ fiind funcția de la punctul **a)**).

**III.** **1**.Arătați că polinomul $f=x^2+3x+3$ divide polinomul, $g=(x+1)^{3n+2}+x+2, \forall n\in$N*.

**2**. Fie $\hat{a}, \hat{b}\in \mathbf{Z}_n$, și ecuația $\hat{a}\cdot x=\hat{b}$. Arătați că:

**a)** dacă $(a, n)=1$, atunci ecuația $\hat{a}\cdot x=\hat{b}$ admite soluție unică.

**b)** dacă $(a, n)=d>1$ și $d$ nu divide pe $b$, atunci ecuația $\hat{a}\cdot x=\hat{b}$ nu are soluții.

**IV.** **1.** Fie funcția $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ , $f(x)=\begin{cases}|x\ln x-x|, & x\in(0,\infty)\\ 0, & x=0\end{cases}$.

**a)** Studiați continuitatea și derivabilitatea lui $f$ pe $[0, \infty)$

**b)** Studiati variatia funcției $f$ și reprezentați graficul ei.

**c)** Arătati că restricția lui $f$ la $[e, \infty)$ are inversă, $f^{-1}$, și studiați derivabilitatea lui $f^{-1}$.

**d)** Calculați $f'(e^3)$ și $(f^{-1})''(2e^2)$.

**e)** Calculati aria suprafeței plane mărginită de graficul funcției $f$, axa $Ox$, și dreptele $x=\sqrt{e},\ x=e^2$.

**2**. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=e^{x^2}-1-x^2-x^4$.

**a)** Să se arate că $f'(x)>0, \forall x>0$.

**b)** Să se arate că $f(x)>0, \forall x>0$.

**c)** Să se demonstreze că : $\int_0^1 e^{x^2}dx>1{,}43$.