CONCURSURI SI EXAMENE

Concurs de admitere 2001 , Iaşi

Facultatea de Informatică , Universitatea "Al. I. Cuza"

Elemente de analiză matematică

I. a)

1. Privitor la numărul de asimptote, care dintre afirmaţiile de mai jos pot fi adevărate pentru o funcţie f: **R**→**R** ?

i) f are două asimptote orizontale, două asimptote oblice şi o asimptotă verticală ;
ii) f are o asimptotă orizontală, o asimptotă oblică şi o asimptotă verticală ;
iii) f are o asimptotă orizontală, o asimptotă oblică şi nici o asimptotă verticală ;
iv) f are două asimptote oblice, două asimptote verticale şi nici una orizontală.

Justificaţi răspunsul (răspunsurile) ales(e).

2. Care din propoziţiile de mai jos exprimă o proprietate adevărată privind continuitatea şi derivabilitatea?

i) Orice funcţie continuă într-un punct este derivabilă în acel punct ;
ii) Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct ;
iii) Orice funcţie continuă pe intervalul [a,b] este derivabilă pe intervalul (a,b) ;
iv) Orice punct în care o funcţie oarecare este derivabilă şi continuă este punct de extrem al acelei funcţii.

3. Pentru o funcţie f : **I**→**R**, **I** interval deschis, f derivabilă pe **I**, fie $a\in$**I** un punct de minim local sau global. Atunci:

i) $f_s'(a)\neq f_d'(a)$; ii) $f'(a)>0$; iii) $f'(a)<0$; iv) $f'(a)=0$.

4. Fie o funcţie oarecare f :[a,b]→**R**, a<b, f derivabilă pe intervalul (a,b). Atunci:

i) Între două rădăcini consecutive ale lui f există cel mult o rădăcină a lui f' ;
ii) Între două rădăcini consecutive ale lui f' există cel mult o rădăcină a lui f ;
iii) Între două rădăcini consecutive ale lui f există cel puţin o rădăcină a lui f' ;
iv) Între două rădăcini consecutive ale lui f' există cel puţin o rădăcină a lui f.

Justificaţi răspunsul (răspunsurile) ales(e).

5. Care dintre afirmaţiile de mai jos sunt adevărate pentru orice şir de numere reale?

i) Orice şir convergent este marginit ; ii) Orice şir convergent este monoton ;
iii) Orice şir mărginit este convergent; iv) Orice şir monoton este convergent .

<u>**Notă.**</u> **Răspunsurile se vor da numai pe teza cu colţuri înnegrite, sub forma: "I.a) 1.x", unde x ∈ { i, ii, iii, iv} etc. Fiecare întrebare are cel puţin una din cele patru variante corectă. Dacă la o întrebare sunt adevărate mai multe variante, atunci se vor indica toate variantele adevărate. Punctajul la o întrebare nu se acordă dacă indicaţi şi variante false. Acolo unde se cere, se va adăuga justificarea răspunsului dat.**

b) Fie funcţia f : **R**→**R**, $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}\ , & x<0\\ 1+\sqrt{x}\ , & x\geq 0\end{cases}$.

1. Să se studieze continuitatea funcţiei în punctul x=0.
2. Să se studieze derivabilitatea funcţiei în punctul x=0.
3. Să se comenteze rezultatele de la puntele **I.b)1.** şi **I.b)2.** prin prisma răspunsului care l-aţi dat la punctul **I.a) 2 .**

II. a) Fie $a\in\mathbf{R}$, $a>0$, fixat şi $(x_n)_{n\geq 0}$ şirul definit prin relaţia de recurenţă:

$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)$, $\forall n\geq 1$, cu $x_0=2$. Să se studieze convergenţa acestui şir.

b) Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$, a şi b constante reale.

Algebra

III. a) Fie (G, $\bullet$) un grup cu proprietatea că $(xy)^2=x^2y^2$ pentru oricare x, y din G. Demonstraţi că G este grup abelian.

b) Să se discute după valorile parametrilor $a\in Z_8, b\in Z_8$ şi să se rezolve în $\boldsymbol{Z_8}$ ecuaţia $ax+b=\hat{0}$. Fiecare caz identificat va fi ilustrat printr-o ecuaţie (a=?, b=?) şi prin soluţiile respective.

IV. a) Definiţia corpului comutativ.

b) Fie a, b, c numere reale. Definim pe **R** legile de compoziţie:
$x\oplus y=ax+by-2$, oricare ar fi x şi y numere reale; $x\otimes y=xy-2x-2y+c$, oricare ar fi x şi y numere reale. Determinaţi a, b şi c astfel încât $(\mathbf{R}, \oplus, \otimes)$ să fie corp.

<u>Facultatea de automatică şi calculatoare, Univ. Tehnică "Gh. Asachi"</u>

1. Suma cuburilor rădăcinilor trinomului $3x^2+3(a+1)x+a^2$, $a\in\mathbf{R}$, are valoarea maximă dacă:

(a) $a=\frac{1}{4}$; (b) $a=\frac{3}{4}$; (c) $a=-\frac{3}{4}$; (d) $a>0$; (e) $a\in[-2,-1]$.

2. Mulţimea rădăcinilor ecuaţiei $\frac{a^2}{x}-\frac{b^2}{x-1}=a^2+b^2$, $a, b\in\mathbf{C}$, $ab\neq 0$, este:

(a) $\{0, 1\}$; (b) $\left\{\frac{a^2-i|ab|}{a^2+b^2},\frac{a^2+i|ab|}{a^2+b^2}\right\}$; (c) $\left\{\frac{a^2-iab}{a^2+b^2},\frac{a^2+iab}{a^2+b^2}\right\}$;

(d) $\left\{\frac{2a^2-i|ab|}{a^2+b^2},\frac{2a^2+i|ab|}{a^2+b^2}\right\}$; (e) $\left\{\frac{2a^2-iab}{a^2+b^2},\frac{2a^2+iab}{a^2+b^2}\right\}$.

3. Funcţia $f:(0,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită de $f(x)=x^{\frac{1}{\ln x}}$, este:

(a) strict descrescătoare pe (0, 1) şi strict crescătoare pe $(1, +\infty)$;
(b) strict crescătoare pe (0, 1) şi strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$;
(c) injectivă; (d) constantă; (e) surjectivă.

4. Fie sistemul $\begin{cases} ax+y=1+a \\ x+ay=1-a \end{cases}$ cu $a\in\mathbf{R}$. Să se determine a, astfel încât sistemul să fie compatibil determinat şi soluţia să satisfacă condiţia $x>0$, $y>0$.

(a) $-2 < a < 1+\sqrt{2}$; (b) $-1 < a < \sqrt{2}-1$; (c) $-1-\sqrt{2} < a < 1$
(d) $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}-1$; (e) $-1-\sqrt{2} < a < -1+\sqrt{2}$.

5. Se consideră şirul (x_n), dat prin relaţia $x_n = \frac{1}{2}(1 + x_{n-1})$ pentru $n \geq 1$, în care $x_0 < 1$ este un număr real fixat. Să se studieze monotonia şirului şi să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(a) (x_n) crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$; (b) (x_n) crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$;

(c) (x_n) descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$; (d) (x_n) descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$;

(e) (x_n) crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$.

6. Se dă funcţia f : **R**→**R** prin relaţia $f(x) = \frac{x+m}{x^2+1}e^{-x}$, în care m este un parametru real. Să se afle valoarea lui m pentru care f are extrem în punctul $x = 1$ şi să se precizeze natura acestui extrem.

(a) $m = \frac{3}{2}$, $x = 1$ punct de maxim; (b) $m = \sqrt{3}$, $x = 1$ punct de minim;

(c) $m = \frac{1}{2}$, $x = 1$ punct de maxim; (d) $m = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ punct de maxim;

(e) $m = \frac{1}{e}$, $x = 1$ punct de minim.

7. Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$ este:

(a) $= \frac{3}{2}$; (b) $= \frac{1+\pi}{2}$; (c) $= \frac{1}{8}(\pi - 2\ln 2)$; (d) $= \frac{1}{4}(\pi + \ln 2)$; (e) $= \frac{1}{4}(\pi + \sqrt{3})$.

8. Se consideră dreptunghiul *ABCD* unde *AB=3BC*. Pe latura *CD* se ia punctul *E* astfel că $EC \equiv BC$, iar $AE \cap DB = \{O\}$. Se cere măsura unghiului *DOA.*

(a) 30°; (b) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$; (c) 45°; (d) $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}$; (e) 60°.

9. Să se determine soluţiile ecuaţiei $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x$.

(a) $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$; (b) $-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$; (c) $\frac{3\pi}{8} + k\pi$; (d) $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$; (e) $k\frac{\pi}{8}$ ($k \in$ **Z**).

10. O mărgea se obţine dintr-un corp sferic sfredelind o gaură de forma unui cilindru circular drept. Ştiind că înălţimea cilindrului este 6 se cere volumul mărgelei.

(a) 24π; (b) 36π; (c) 48π; (d) $\frac{100\pi}{3}$; (e) $\frac{50\pi}{3}$.

Notă. Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă are numai una din cele cinci variante corectă.