3. Dacă $x = y + \sqrt{1-y^2}$ şi $y = -\frac{3}{5}$, atunci $x = \dots$

4. Fie $ABCD$ trapez, $AB \| CD$, $AB = 7$ cm, $CD = 4$ cm şi înălţimea de 6 cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, atunci distanţa de la O la AB este ...

5. Feţele laterale ale unei piramide patrulatere regulate sunt triunghiuri echilaterale de perimetru 18 cm. Volumul piramidei este ...

6. Ion şi Vasile au împreună 18 ani. Ei vor avea împreună 50 ani peste ... ani.

7. Desfăşurarea suprafeţei laterale a unui cilindru circular drept este un pătrat de latură π cm. Aria totală a cilindrului este ...

8. Dacă $x \in \mathbf{Z}$ şi $x^3 - x^2 + 3x - 3$ este număr prim, atunci $x = \dots$

9. Dacă $2a = 3b$ şi $\frac{a+9}{b-4} = 3$, atunci $ab = \dots$

B. 1. Un bazin poate fi umplut de un robinet în 4 h. Acelaşi bazin poate fi golit de un alt robinet în 20 h. Dacă bazinul este gol şi se deschid simultan ambele robinete, în câte ore va fi umplut bazinul?

2. Fie $a = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{30 - 12\sqrt{6}}$.

a) Arătaţi că $a < 0$;

b) Calculaţi a^2, b^2 şi deduceţi că $a + b = 0$.

3. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Dacă apotema piramidei este de 6 cm, iar $\sphericalangle((VBC),(ABC)) = 60°$, se cere:

a) să se arate că înălţimea piramidei VO are lungimea $3\sqrt{3}$ cm;

b) să se determine un punct $I \in (VO)$ egal depărtat de (ABC) şi (VBC).

Bacalaureat - teste pregătitoare

Gheorghe IUREA *şi* *Petru RĂDUCANU*[1]

Testul 1

1. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $2\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} = 5$; **b)** $2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} + 2\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 5$.

2. În dezvoltarea $\left(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}}\right)^n$, suma ultimelor trei coeficienţi este 22. Suma dintre al treilea şi al cincilea termen este 135. Determinaţi n şi x.

3. Pe $\mathbf{R}$ definim legea $x * y = ax + by + cxy$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. Determinaţi a, b, c dacă legea $*$ este comutativă, admite elementul neutru -2, iar inversul lui 2 este egal cu $-\frac{2}{3}$.

4. Determinaţi numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $\ln x = mx$, $m \in \mathbf{R}$.

5. Fie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \ln x + (1-x)\ln(1-x), & x \in (0,1) \\ 0, & x \in \{0,1\} \end{cases}$.

[1] Profesori, Liceul "D. Cantemir", Iaşi

a) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea lui f;

b) Determinaţi intervalele de monotonie şi extremele funcţiei f;

c) Arătaţi că $a\ln\frac{1}{a}+b\ln\frac{1}{b}\le \ln 2$, pentru orice $a,b\in(0,\infty)$, $a+b=1$.

6. Fie $a_k=\int_0^k \frac{dx}{x^2+3x+2}$, $k\in\mathbf{N}^*$, $b_n=\sum_{k=1}^{n} a_k+n\ln\frac{1}{2}$. Calculaţi $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\ln n}$.

7. Fie $A(5,0)$, $B(1,4)$ şi dreapta $d: x+y-3=0$. Determinaţi coordonatele punctului $C\in d$ dacă:

a) ΔABC este dreptunghic în C;

b) ΔABC este isoscel de bază AB.

Testul 2

1. Fie $f:(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

a) Reprezentaţi grafic f;

b) Calculaţi $\lim_{n\to\infty}(f(1)+f(2)+...+f(n)-2\ln n)$

2. Fie $I_n=\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$, $n\in\mathbf{N}^*$.

a) Calculaţi I_1, I_2;

b) Arătaţi că $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent;

c) Aflaţi $\lim_{n\to\infty} I_n$.

3. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x^y=y^x \\ x^3=y^2 \end{cases}$.

4. Fie ecuaţia $\begin{vmatrix} x-1 & a-2 & a-x \\ -1 & x^2-1 & x^2 \\ x-2 & 2x+a-2 & x+a \end{vmatrix}=0$. Determinaţi $a\in\mathbf{R}$ dacă ecuaţia admite o rădăcină dublă număr întreg.

5. Fie $\mathcal{F}=\{f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z} \mid f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbf{Z}\}$.

a) Arătaţi că $(\mathcal{F},\circ)$ este monoid;

b) Determinaţi două funcţii $f,g\in\mathcal{F}$ astfel încât $f\circ g\ne g\circ f$;

c) Determinaţi elementele inversabile ale lui $\mathcal{F}$;

d) Dacă $f\in\mathcal{F}$, $f(x)=ax+b$, determinaţi $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n \text{ ori}}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

6. Fie $A(-1,5)$ şi dreapta $d: 3x-4y+12=0$. Determinaţi ecuaţia cercului de centru $C(1,0)$ dacă simetricul lui A faţă de dreapta d este situat pe cerc.

7. Calculaţi $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

Testul 3

1. a) Verificaţi că: $1-2+3-4+...+(-1)^{n-1}n=\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)+1}{4}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

b) Determinaţi restul împărţirii polinomului $P(x)=x^n+x^{n-1}+...+x+1$, $n\in\mathbf{N}$, $n\ge2$, la $(x+1)^2$.

2. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbf{Z},\ m \text{ impar} \right\}$.

a) Arătaţi că $(G, \cdot)$ este grup abelian izomorf cu $(2\mathbf{Z}, +)$.

b) Deoarece G este grup, orice $A \in G$ este inversabilă şi totuşi $\det A = 0$. Explicaţi acest lucru.

3. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 - x\sqrt{6} + 1 = 0$ şi x_3, x_4 rădăcinile ecuaţiei $x^2 - x\sqrt{7} + 1 = 0$. Calculaţi $P = (x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)$.

4. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) = f(2x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

a) Arătaţi că $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ verifică relaţia dată.

b) Dovediţi că $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

c) Determinaţi funcţiile continue care verifică relaţia dată.

5. Arătaţi că funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-x}, & x \le 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbf{R}$. Determinaţi primitiva care se anulează în zero.

6. Arătaţi că $\ln(x+1) \le \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, $x \ge 0$ şi $2^{\sqrt{2}} < e$.

7. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(9,0)$, $B(-3,0)$, $C(0,6)$. Dacă H, G, P sunt ortocentrul, centrul de greutate şi centrul cercului circumscris ΔABC atunci H, G, P sunt coliniare şi $HG = 2GP$.

Testul 4

1. Determinaţi $m \in \mathbf{R}$ dacă $\dfrac{x^2 - mx + 2}{x^2 - 3x + 6} \ge -1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} 4^x - 5 \cdot 9^y = -1 \\ 4^x + 2^x \cdot 3^y = 6 \end{cases}$.

3. Determinaţi $m \in \mathbf{R}$ dacă există a, b, $c \in \mathbf{R}$, nu toate nule, astfel ca:

$$a\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. a) Verificaţi că $e^x \ge ex$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) Determinaţi $a > 0$ dacă $a^x \ge ax$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

5. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x^2 + ax + 1)e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine a dacă f este crescătoare pe $\mathbf{R}$;

b) Pentru $a = 0$, determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de intersecţie cu axa Oy;

c) Arătaţi că $g : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $g(x) = (x^2 + 1)e^x$ este bijectivă. Calculaţi $(g^{-1})'(1)$.

6. a) Arătaţi că $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots - x^{2n-1} + \dfrac{x^{2n}}{1+x}$, $x \ge 0$, $n \in \mathbf{N}^*$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx = 0$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}\right)$.

7. Fie hiperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Determinați asimptotele hiperbolei. Verificați că $A(5,\frac{8}{3})$ aparține hiperbolei. Arătați că tangenta în A la hiperbolă intersectează asimptotele în două puncte B, C, iar A este mijlocul lui (BC).

Testul 5

1. Rezolvați inecuația: $\sqrt{\log_3(9x-3)} \le \log_3(x-\frac{1}{3})$.

2. Fie $A=\begin{pmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbf{R}$.

a) Calculați $\det A$;

b) Verificați că $A^2=(2b+4a)A-b(b+4a)I_4$;

c) Pentru $a=b=1$, determinați A^{-1}.

3. Fie $f,g\in\mathbf{Z}_3[X]$, $f=\hat{2}X^3+X+\hat{2}$, $g=aX^3+bX^2+cX+d$. Determinați $a,b,c,d\in\mathbf{Z}_3$ astfel încât funcțiile polinomiale asociate $\bar{f}$, $\bar{g}$ să fie egale.

4. Determinați $a,b\in\mathbf{R}$, $a>0$, dacă $\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{bn}{n^2+n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$.

5. Considerăm $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+ax^2+\frac{a^2}{4}x+1$, $a>0$.

a) Arătați că f admite un maxim și un minim pentru orice $a>0$.

b) Dacă M, m sunt valorile extreme ale lui f, calculați $M-m$.

6. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(1-x)e^{-x}$.

a) Determinați primitivele funcției f;

b) Calculați $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k}{\sqrt[n]{e^k}}$.

c) Calculați aria determinată de graficul funcției f și axa Ox, $x\in[0,2]$.

7. Într-un reper ortogonal considerăm $A(-1,5)$, $B(3,1)$, $C(-3,-1)$.

a) Arătați că ΔABC este isoscel;

b) Dacă D este mijlocul segmentului AB arătați că perpendiculara din D pe BC este tangentă cercului circumscris ΔACD.

Testul 6

1. Fie $f=X^{100}+X^{49}+2X^2+2$. Arătați că f se divide la X^2+X+1. Găsiți restul împărțirii lui f la X^2-1.

2. Determinați rangul matricei $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & x+1 & x+2 & x+3 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbf{R}$.

3. Considerăm $A=\{f \mid f:\{0,1\}\to\mathbf{R}\}$. Arătați că $(A,+,\cdot)$ este inel. Arătați că $(A,+,\cdot)$ are divizori ai lui zero.

4. Fie $(a_n)_n$ o progresie geometrică, $a_1 > 0$ şi $q \in (0,1)$, $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $T_n = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$. Determinaţi a_1 şi q dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \frac{9}{5}$.

5. **a**) Arătaţi că $\frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}}$, $x > 1$.

b) Arătaţi că punctul intermediar din teorema lui Lagrange aplicată funcţiei $f(x) = \ln x$ pe $[a, b]$ este între media aritmetică şi media geometrică a numerelor a, b, $0 < a < b$.

6. Fie K suprafaţa determinată de $x = -1$, $y = 0$ şi graficul funcţiei $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [-1, 0] \\ 1 - x, & x \in (0, 1] \end{cases}$.

a) Determinaţi aria suprafeţei K;

b) Determinaţi două drepte paralele la Oy care împart K în trei mulţimi de arii egale.

7. Se consideră elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Determinaţi ecuaţiile tangentelor la elipsă paralele cu dreapta $2y - x - 7 = 0$.

Testul 7

1. Determinaţi forma algebrică a numărului $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 + ... + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^9$.

2. Arătaţi că $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + ... + C_k^k$, $\forall n \geq k > 0$.

3. Determinaţi $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} ax + by = 4a \\ cx + (c+4)y = a + b + c + 2 \end{cases}$ să fie compatibil nedeterminat, iar o soluţie să fie $(1, 1)$.

4. Fie $f : \mathbf{R}\backslash\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

a) Determinaţi a, b astfel încât $y = x + 4$ să fie asimptotă.

b) Pentru $a = 3$, determinaţi valorile lui b pentru care f are două puncte de extrem.

5. Determinaţi domeniul de definiţie al funcţiei $f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$. Câte tangente putem duce la graficul lui f care să conţină $O(0,0)$?

6. Arătaţi că $\int\limits_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$. Calculaţi $\int\limits_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

7. Fie $A(0,9)$, $B(3,0)$, $C(-5,4)$, $D(3,10)$. Arătaţi că AB, paralela prin C la AD şi perpendiculara din D pe BC sunt concurente.