Concursul interjudeţean de matematică "Radu Miron", Vaslui, octombrie 2000

Concursul s-a desfăşurat în perioada 27-29 oct. 2000 în incinta Liceului "M. Kogălniceanu" din Vaslui. La acest concurs au participat elevi din următoarele judeţe: Botoşani, Brăila, Buzău, Galaţi, Iaşi, Neamţ, Vaslui şi Vrancea. Timpul de lucru: 3 ore.

Clasa a VII-a

1. Fie $a = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{1999}$.
a) Calculaţi numărul a;
b) Arătaţi că $a \vdots 15$;
c) Determinaţi restul împărţirii lui a la 14.

2. Fie triunghiul ABC şi punctele $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$ astfel încât $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{2}{3}$. Se consideră M mijlocul lui $[BC]$ şi punctele D şi E, simetricele punctului M faţă de B şi respectiv C. Să se arate că dreptele AM, DP şi EQ sunt concurente.

3. Fie un dreptunghi $ABCD$ cu $E \in (CD)$ şi $AB < BC$. Bisectoarea unghiului BAE intersectează dreapta DC în M, dreapta BC în F şi $AB \cap EF = \{N\}$.
Să se arate că $m(\widehat{AFE}) = 90^\circ$ dacă şi numai dacă $MN \| AE$.

4. Determinaţi cifrele distincte a, b, c astfel încât să aibă loc egalitatea: $\overline{a,b} \cdot \overline{0,(c)} = \overline{b,a}$. **(G.M. nr. 12 / 1999)**

Clasa a VIII-a

1. Fie $x, y, z \in [1, \infty)$. Arătaţi că maximul expresiei $E = \frac{\sqrt{yz-1}}{yz} + \frac{\sqrt{zx-1}}{zx} + \frac{\sqrt{xy-1}}{xy}$ este $\frac{3}{2}$ şi să se precizeze în ce condiţii se atinge acest maxim.

2. În triunghiul ABC dreptunghic în A, fie $[BD$ bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{ABC}$, $D \in (AC)$. Dacă E este mijlocul segmentului $[BC]$ şi $DE \perp BD$ să se calculeze $\frac{AC}{AB}$. **(G.M. nr. 10 / 1999)**

3. Determinaţi toate numerele întregi k pentru care există un număr întreg x astfel încât $\sqrt{39 - 6\sqrt{12}} + \sqrt{k \cdot x\,(k \cdot x + \sqrt{12}) + 3} = 2k$.

4. Să se afle raza cercului circumscris unui triunghi ştiind că măsurile unghiurilor sale sunt proporţionale cu numerele 3, 4 şi 5 şi că perimetrul şi aria sa se exprimă prin acelaşi număr.

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi în $\mathbf{R}$ ecuaţia: $\frac{x^2}{|x-2|} - |x| = \frac{2\,|x|}{x-2}$. **(G. M. nr. 5 - 6 / 1999)**

2. În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ avem latura bazei $AB = a$ şi muchia laterală $AA' = a\sqrt{2}$. Să se arate că oricare ar fi un punct M aparţinând diagonalei BD', atunci $A'M + MD \geq \frac{a(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}$.

3. Să se rezolve în $\mathbf{N}^2$ ecuaţia: $x^2 = 4y^2 + 3y + 3$.

4. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi romburile $ABDE$ şi $ACFE$. Dacă $AB = a$ şi $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{CAE}) = 60^\circ$ să se afle:

a) distanţa de la simetricul punctului E faţă de FD, la planul (ABC),

b) $\dfrac{FM + EN}{MN}$, unde $M \in (AC)$, $N \in (AB)$, astfel încât suma $FM + MN + EN$ să fie minimă.

Clasa a X-a

1. Să se calculeze suma $\sum\limits_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \cos \dfrac{k\pi}{4n+3}$, $n \in \mathbf{N}$. **(G.M. nr. 4 / 2000)**

2. Se dă paralelogramul $ABCD$; o paralelă la laturile opuse AB şi CD întâlneşte pe AD în E şi pe CB în F; o paralelă la laturile AD şi BC întâlneşte pe AB în G şi pe CD în H. Dreptele EH şi GF se taie într-un punct I. Să se arate că punctele A, C şi I sunt coliniare (soluţie vectorială).

3. Să se afle $\min\limits_{x \in \mathbf{R}} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}\right)$.

4. Fie $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n^2}$. Să se arate că $a_n < a_{n+1}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

Clasa a XI-a

1. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţia: $16^{x^2+y} + 16^{x+y^2} = 1$. **(G. M. 1 / 1997)**

2. Fie $Oxyz$ un triedru astfel încât: $m(\widehat{xOy}) + m(\widehat{yOz}) + m(\widehat{zOx}) = 180^\circ$ şi $P \in Int(Oxyz)$. Să se arate că OP este mai mare decât suma distanţelor de la P la planele (xOy), (yOx), (zOx).

3. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$; $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ astfel încât:

(i) $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > 0$; $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > 0$ şi $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$.

(ii) $x_1 > y_1$; $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$; ... ; $x_1 + \ldots + x_n > y_1 + \ldots + y_n$.

Să se arate că: **a)** $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n$;

b) $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k > y_1^k + y_2^k + \ldots + y_n^k$, $(\forall)\, k \in \mathbf{N}^*$.

4. Să se arate că funcţia $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = 2z + |\, z \,|$ este bijectivă.

Clasa a XII-a

1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă a cărei derivată este $f'(x) = e^{-x^2}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că există $c = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \in \mathbf{R}$ şi $f(x) > c$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

b) Presupunem că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ şi fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \ln f(x)$. Să se arate că $g''(x) < 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

2. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n \in \mathbf{R}$ cu $x_0 > 0$ şi $x_{n+1} = \sqrt{x_n + \dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

b) Să se stabilească natura şirului $(nx_n)_{n \geq 0}$ şi, în caz de convergenţă, să se determine limita sa. **(G.M. nr. 1 / 1997)**

3. Fie un cerc C şi o dreaptă d exterioară cercului. Să se găsească locul geometric al centrelor cercurilor tangente la cercul C şi dreapta d.

4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0$, $(\forall)\, i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Să se arate că dacă n este impar, atunci $\det A = 0$.