TESTE pentru examenul de CAPACITATE[0]

Testul I

I. 1. Dacă $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leq 1\}$ şi $B = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-1| \leq 1\}$, atunci $A \backslash B = ...$

2. Soluţia în $\mathbf{R}$ a ecuaţiei $\frac{x^2-4}{x-2} = 4$ este ....

3. $\left\{x \in \mathbf{N} \mid \frac{\sqrt{3}x-6}{x^2-6x+9} \leq 0\right\} = ...$

4. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90^o$) avem $sin(\hat{B}) = \frac{3}{4}$. Dacă $AC = 9$ perimetrul triunghiului este .... şi aria lui este ..... .

5. Dacă $\frac{2x-3y}{2x+3y} = 0,01(3)$, atunci $\frac{x}{y} = ...$

6. Dacă 3, 4 şi 5 sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci distanţa dintre ortocentru şi centrul cercului circumscris triunghiului este .... .

7. Dacă $P(X)$ este un polinom cu coeficienţi întregi şi $P(2000) = 0$, atunci restul împărţirii sumei coeficienţilor lui $P(X)$ la 1999 este egal cu...

8. Dacă A_t şi d sunt respectiv aria totală şi diagonala unui paralelipiped dreptunghic şi $d^2 + A_t = 144$, atunci suma lungimilor dimensiunilor paralelipipedului este egală cu ....

9. Dacă secţiunea axială a uni cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala de $5\sqrt{2}$ cm, atunci aria laterală a cilindrului este ...

II. 1. Două robinete, curgând concomitent, pot umple un bazin în 30 de ore. Acelaşi bazin poate fi umplut şi dacă primul robinet poate curge singur 25 de ore şi apoi al doilea curge singur 40 de ore. În câte ore umple bazinul fiecare robinet?

2. a) Un triunghi isoscel are aria de 24 cm^2 şi baza de 8 cm. Aflaţi raza cercului circumscris şi raza cercului înscris triunghiului.

b) Fie $P(X) = (a^2+b^2+c^2)X^2 + 2(a-3b+2c)X + 14, a, b, c \in \mathbf{R}$.

i) Să se afle a, b, c ştiind că $P(X) \vdots X - 1$.

ii) Pentru a, b, c de la punctul **i)**, arătaţi că $P(\alpha) \geq 0$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$.

3. a) Într-o cutie paralelipipedică cu dimensiunile 10 cm, 6 cm şi 12 cm se introduc bile sferice cu raza de 1 cm. Să se afle numărul maxim de bile ce pot fi puse în cutie şi cât la sută din volumul cutiei este ocupat de bile în acest caz.

b) Un con circular drept are secţiune axială un triunghi isoscel cu baza de 8 cm şi perimetrul de 18 cm. Să se afle:

i) aria laterală şi volumul conului;

ii) măsura unghiului corespunzător sectorului de cerc obţinut prin desfăşurarea conului;

---

[0] *Prof. Gabriel Mârşanu, Liceul de Informatică "Gr.Moisil" Iaşi*

iii) poziţia uni punct interior conului egal depărtat de baza conului şi de pânza conică.

Testul II

I. 1. Două numere reale pozitive cu media aritmetică $2\sqrt{3}$ şi media geometrică $2\sqrt{2}$. Atunci media armonică a celor două numere este ....

2. Inecuaţia $|1-2x| \leq 7$ are în $\mathbb{R}$ soluţia: .... .

3. Cel mai mic număr natural care împărţit la 12 dă restul 7, împărţit la 15 dă restul 10 şi împărţit la 18 dă restul 13 este : ....

4. Numărul de elemente al mulţimii $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| 19^{2000} \vdots x\right\}$ este : ....

5. În tringhiul ABC, $m(\hat{A}) = 30^o$ şi I este intersecţia bisectoarelor interioare. Atunci $m(\widehat{BIC})$ este ....

6. Dacă $F(X) = \dfrac{X^2-1}{X^2+X-2}$, atunci $F(2)\cdot F(3)\cdot \ldots\cdot F(10)$ este : ....

7. Un triunghi echilateral are aria egală cu $48\sqrt{3}$ cm^2. Atunci perimetrul triunghiului este: ...

8. Un dreptunghi are diagonala de 10 cm şi unghiul dintre diagonale de 120^o. Aria dreptunghiului este egală cu: ...

9. Cel mai mic număr natural divizibil cu 3, 4 şi 5 este ...

II. 1. Să se determine polinomul $P(X)$ cu coeficienţi reali care îndeplineşte simultan condiţiile:

a) restul împărţirii lui $P(X)$ la X^3-2 este egal cu pătratul câtului;

b) $P(-2)+P(2)+34=0$.

2. În triunghiul ABC cu $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 11$ cm, se consideră bisectoarea interioară $[BE, E \in (AC)$.

a) Determinaţi lungimile segmentelor $[AE]$ şi $[EC]$.

b) Dacă G este centrul de greutate al ABC şi I centrul înscris, stabiliţi dacă $GI || AC$.

3. a) Prisma dreaptă $[ABCDA'B'C'D']$ are la bază pătratul $ABCD$ de latură x şi centru O. Dacă unghiul dreptelor $A'O$ şi CD' este de 30^o, să se calculeze volumul prismei şi aria totală.

b) Un con circular drept se desfăşoară după un sector circular având lungimea arcului corespunzător de 8π cm, iar aria de 24π cm^2. Aflaţi volumul conului.

Testul III

I. 1. Dacă numerele a, b, c sunt invers proporţionale cu numerele 6, 4, respectiv 2 şi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$, atunci $a\cdot b\cdot c =$ ....

2. Raportul perimetrelor a două dreptunghiuri este $\frac{1}{4}$. Unul dintre dreptunghiuri are fiecare dimensiune cu 2 cm mai mică decât cea corespunzătoare a celuilalt. Perimetrul dreptunghiului cu dimensiunile mai mari este ....

3. Dacă $a = 3^{42} + 9^{21} + 27^{14}$, $b = 81^6 + 27^8 + 9^{12}$ şi $c = \left(3^2\right)^{3^2}$, atunci $a : b : c = ...$

4. Suma tuturor numerelor de cel mult trei cifre, divizibile cu 41, este egală cu...

5. Dacă împărţim polinomul $P(X)$ la polinomul $Q(X)$ obţinem câtul $X^3 - 27$ şi restul $3X^2 - 2X - 5$, atunci $P(3) = ...$

6. Dacă triunghiul dreptunghic ABC are $AB = AC$, atunci $\cos C + \cos B = ...$

7. Dacă o sferă are aria egală cu 36π cm^2, atunci volumul sferei este egal cu .... cm^3.

8. Dacă secţiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala de 6 cm, atunci volumul cilindrului este egal cu ... cm^3.

9. Două conuri au acelaşi vârf şi generatoarele una în prelungirea celeilalte. Dacă razele celor două conuri sunt 2 cm, respectiv 6 cm, atunci raportul ariilor laterale ale celor două cercuri este ...

II. 1.a) Arătaţi că, dacă $a, b \in \mathbf{Q}$ şi $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$, atunci $a = b = 0$.
b) Să se determine $x, y \in \mathbf{Q}$, ştiind că $(\sqrt{2} + \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})y = 3\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

2. Fie M mijlocul laturii $[AC]$ a triunghiului ABC. Dacă $AB = 14$ cm, $BM = 25$ cm şi $BC = 48$ cm, să se determinelungimea laturii $[AC]$ şi aria tringhiului ABC.

3. O piramidă triunghiulară regulată are aria laterală egală cu $18\sqrt{3}$ cm^2 iar unghiul diedru format de o faţă laterală cu baza piramidei este de 60°. Să se afle:
a) aria totală a piramidei;
b) volumul piramidei;
c) distanţa de la centrul bazei la o faţă laterală.

Teză - clasa a VIII-a, semestrul al doilea, mai 1999

I. 1. Dacă a, b sunt numere naturale, astfel încât $a(a + 1) + b = 932$ şi b este prim, atunci $a = ...$ şi $b = ..$

2. Suma a două numere naturale, prime între ele, este cel mult egală cu 120. Împărţind pe cel mai mare la cel mai mic obţinem câtul 4 şi restul 15. Numărul soluţiilor este ....

3. Dacă x este cifră în baza 10 şi x este diferit de 0, atunci valoarea raportului $\frac{\overline{x2x} + \overline{x4}}{\overline{xx1} + \overline{2x} + 3}$ este egală cu: ...

4. Fie ΔABC cu $AB = 2$cm, $AC = 2\sqrt{3}$ cm şi $BC = 4$ cm. Dacă D este proiecţia lui A pe BC, F este proiecţia lui D pe AB şi F proiecţia lui D pe AC, atunci $EF = ...$

5. Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x + 3) = 3x + 1$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, atunci $f(x) = ...$

6. Un con circular drept are volumul egal cu $9\pi\sqrt{3}$ cm^3. Atunci aria totală a conului este: ...

7. Fie $a = \sqrt{27} - \sqrt{(-3)^2} + |1 - \sqrt{3}| + |4\sqrt{3} - 7|$. Atunci $a = ...$

8. Prisma dreaptă $[ABCDA'B'C'D']$ are la bază pătratul $ABCD$ de latură a şi centru O. Dacă unghiul dreptelor $A'D$ şi CD' este de 30^o, atunci volumul prismei este: ...

9. Rezolvând în $\mathbb{R}$ inecuaţia $|12x - 3| \geq 1$ obţinem soluţia: ....

II. 1. Fie un polinom cu coeficienţi reali astfel încât $P(0) = 1$ şi $P(x) = P(x - 1) + 2x$. Să se afle restul împărţirii lui $P(x)$ la $x^2 - 1$.

2. a) Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = 10$$

b) Arătaţi că $(\forall)\, a, b, c \in \mathbb{R}$, strict pozitive, are loc:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$$

3. Un con circular drept are generatoarea de 15 cm, iar diametrul bazei de 24 cm. Se secţionează conul cu un plan paralel cu planul bazei astfel încât raportul ariilor secţiunilor axiale ale corpurilor nou formate este $1/8$. Să se afle:

a) aria totală şi volumul conului;

b) aria totală şi volumul trunchiului de con;

c) măsura unghiului sectorului circular după care se desfăşoară suprafaţa laterală a conului.

NOTĂ : Fiecare subiect de la I se notează cu câte 5 puncte, iar cele de la II cu câte 15 puncte.