Concursul de matematică "Adolf Haimovici"

Ediţia a III-a, Iaşi, 27 februarie 1999

Subiecte :

Clasa a IX-a

I. Se dă expresia: $E(x) = \sin^2 x + \sin^2 3x + \sin^2 5x + \sin^2 7x$. Să se calculeze valoarea expresiei pentru $x = \frac{\pi}{8}$ şi $x = \frac{\pi}{16}$.

II. Fie funcţia $f : \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right) \to \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$, $f(x) = \dfrac{x+6}{2x-1}$.

1) Să se arate că f este bijectivă.

2) Dacă f^{-1} este inversa funcţiei f, să se arate că $f = f^{-1}$.

3) Să se găsească punctele de pe graficul funcţiei f cu ambele coordonate numere întregi.

III. Fie ecuaţia : $mx^2 + 2(m+1) + m - 1 = 0$, $m \in \mathbf{R}^*$.

1) Să se găsească o relaţie independentă de m între rădăcinile ecuaţiei.

2) Să se determine $m \in \mathbf{R}^*$ astfel ca o rădăcină a ecuaţiei să fie mai mică decât 1 şi cealaltă mai mare decât 1.

Notă: Timp de lucru : 2 ore.

Clasa a X-a

I. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ când:

$$1999^n - 1998^n = 1 + 3\left(1998^{\frac{n}{3}} + 1998^{\frac{2n}{3}}\right)$$

II. Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$, $n \in \mathbf{N}^*$.
Să se arate că:

$$n(S_n - 1)^2 - m(S_m - 1)^2 = (S_m - S_n)(S_m + S_n - 2), \forall\, m, n \in \mathbf{N}^*.$$

III. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ încât pentru baza $b = \dfrac{a-1}{a+1}$ inegalitatea $\log_b(x^3+3) \geq 1$ să fie adevărată, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Clasa a XI- a

1. Fie funcţia $f(x) = (ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$, $f : I \to \mathbb{R}$.

a) Ce condiţii trebuie să satisfacă numerele reale a, b şi c astfel ca să existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, să fie finită şi nenulă ?

b) Ce condiţii suplimentare satisfac a, b şi c astfel ca funcţia să fie definită pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ şi să fie continuă ?

2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $A^* B$ şi $B^* A$.

b) Să se arate că $(A+B)^n = A^n + B^n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

3. Fie sistemul $\begin{cases} \alpha\, x = y + z \\ \alpha\, y = x + z \\ \alpha\, z = x + y \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie nebanală.
Pentru $\alpha = -1$, să se rezolve sistemul.

Clasa a XII - a

1. Fie $G = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & 4b \\ 7b & a \end{pmatrix},\ a, b \in Q,\ a^2 - 28\, b^2 = 1 \right\}$.

Să se demonstreze că înmulţirea matricelor este lege de compoziţie pe G şi că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} bx + c, & x \in (-\infty, 0) \\ x^2, & x \in [0, 1] \\ a, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât f să admită primitive şi să se determine o primitivă a sa.

3. Să se calculeze :

$$I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2 - 4x)^2}\, dx\ .$$

Concursul de matematică "Adolf Haimovici"

Ediţia a III-a, faza interjudeţeană

22 mai 1998

Clasa a IX - a

1. Rezolvaţi în R următoarea ecuaţie:

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=4\,.$$

2. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}-2x^2-4x+6, & \text{dacă } x\in(-\infty,-2)\\ ax+b, & \text{dacă } x\in[-2,+\infty)\end{cases}$, unde $a,b\in\mathbf{R}$.

(i). Să se găsească toate valorile lui a şi b pentru care f să fie bijectivă.

(ii). Pentru $a=2$ şi $b=10$ este bijectivă ? Dacă da, să se calculeze $f^{-1}(4)$ şi $f^{-1}(10)$.

3. O carte are paginile numerotate de la 1 la n $(n\in\mathbf{N},\ n\geq 2)$. Se adună numerele de pe toate paginile şi se obţine suma 1999. Din greşeală s-a omis o pagină. Să se afle n şi numărul paginii omise.

Clasa a X- a

1. Să se rezolve ecuaţia $2a^{\sqrt{x}}+a^{\frac{1}{x^2}}+a=4a$ (unde $a>0,\ x>0$) şi apoi să se generalizeze.

2. Fie $f:\mathbf{D}\to[0;+\infty)$, $f(x)=\log_a(1+\sqrt{2x-1}),\ a\geq 1$;

a) Să se determine domeniul maxim de definiţie şi să se arate că f este inversabilă;

b) Să se rezolve inecuaţia:

$$f^{-1}(x)\leq 5\,.$$

3. Fie şirul de numere pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$. Să se arate că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică dacă şi numai dacă $a_1a_2...a_n=\sqrt{(a_1\cdot a_n)^n}$, $(\forall)\,n\geq 3,\ n\in\mathbf{N}$.

Clasa a XI - a

I. Să se demonstreze că:

1) $\frac{2(x-1)}{x+1} \leq \ln x \leq \frac{x-1}{\sqrt{x}}$, $(\forall) x \geq 1$;

2) Folosind inegalităţile de la punctul **1)** să se arate că punctul c, care rezultă din teorema lui Lagrange aplicată funcţiei $f : [a, b] \to \mathbf{R}; 0 < a < b$, $f(x) = \ln x$, verifică relaţia

$$\sqrt{ab} < c < \frac{a+b}{2} .$$

II. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă $a_{n+1} = a_n(1 + \frac{3}{n+1}), n \geq 1$ şi $a_1 = 1$.

Să se deducă formula termenului general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ şi să se calculeze limita şirului $(b_n)_{n\geq 1}$, unde

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} .$$

Clasa a XII -a

I. Fie a, b, c 3 numere întregi, $b \neq 0$. Pe $\mathbf{Z}$ se defineşte operaţia "$\odot$" prin

$$x \odot y = axy + b(x + y) + c.$$

1. Arătaţi că operaţia "$\odot$" este asociativă $\Longleftrightarrow b = b^2 - a \cdot c$.

2. Arătaţi că operaţia are element neutru $\Longleftrightarrow b = b^2 - a \cdot c$ şi $b \mid c$.

3. Rezolvaţi ecuaţia $x \odot 1 = c - a$.

II. Să se determine $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ cu proprietatea că funcţia

$$g : (0, \infty) \to (0, \infty), g(x) = \frac{f(x)}{x+1}$$

este o primitivă a funcţiei f.

III. Să se calculeze integrala $\int\limits_0^4 \frac{dx}{|x-a|+2}$.