

Admiterea la Facultatea de Informatică 1999

Algebră

1. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24},$$

pentru $n \geq 2$.

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x + y + z = 1 \\ x + (\lambda + 2)y + z = \lambda + 1 \\ x + y + (\lambda + 2)z = (\lambda + 1)^2 \end{cases}$$

Discuție după parametrul real λ .

3. Fie $E = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Pentru orice $t \in \mathbf{R}$, fie funcția

$$f_t : E \rightarrow E, f_t(x, y) = \left(x + ty + \frac{t^2}{2}, y + t\right), \forall (x, y) \in E.$$

Arătați că :

a) $f_t \circ f_{t'} = f_{t-t'}$, $f_0 = 1_E$, $f_t^{-1} = f_{-t}$, unde "o" este operația de compunere a funcțiilor.

b) Mulțimea $G = \{f_t \mid t \in \mathbf{R}\}$ este grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

c) $(G, \circ) \simeq (\mathbf{R}, +)$.

Analiză matematică

1. Teorema lui Lagrange : enunț, demonstrație, interpretare geometrică.

2. Fie $a > 0$ o constantă reală și $m, n \in \mathbf{N}^*$. Dacă x și y sunt strict pozitive și $x + y = a$, în ce caz produsul $x^m \cdot y^n$ este maxim?

3. Să se determine primitivale funcției

$$f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{\sin x - 2\cos x + 3}.$$
