Examen de Bacalaureat – iunie 1999

MATEMATICĂ (PROBA C)

Profilurile matematică - fizică, informatică și metrologie

I. (38 puncte)

1) (17 p) Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}+2\cdot\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}}=\frac{11}{3}$; b) $\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}+2\cdot\sqrt{\frac{x-4}{x+4}}=\frac{11}{3}$

2) (12 p) Se consideră dezvoltarea $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$, $x\in\mathbf{R}^*$, $n\in\mathbf{N}^*$.

a) Să se determine n astfel încât suma coeficienților primilor trei termeni ai dezvoltării să fie 97.

b) Pentru $n = 8$, verificați dacă există un termen care conține pe x^4. Justificați răspunsul.

3) (9p) Să se rezolve sistemul $(S)\begin{cases}x+2y+z+t=0\\2x+y+z+2t=0\\x+2y+2z+t=0\\x+y+z+t=0\end{cases}$

II. (38 puncte)

1) (14 p) Se consideră funcțiile

$f, g:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\log_{1/2}\left(x^2+1\right)-\log_{1/2}x$, $g(x)=2x^3-3x^2$.

a) Să se stabilească monotonia funcțiilor f și g.

b) Determinați numărul de soluții reale ale ecuației $f(x)=g(x)$.

2) (10 p) a) Să se demonstreze că suma a două funcții convexe f, g: $\mathrm{I}\to\mathbf{R}$ (I interval deschis) este o funcție convexă.

b) Să se arate că următoarele funcții sunt convexe:

f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax^4+bx^2+cx+d$, $a, b, c, d\in\mathbf{R}$, $a, b>0$;

h: $(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $h(x)=4x^4+3x^2-5x+7+\log_{1/5}x$.

3) (14 p) Se consideră șirul $\mathbf{I}_n=\int_0^1\frac{x^n}{4x^2+2x+1}\,dx$, $n\in\mathbf{N}$.

a) Să se arate că $\mathbf{I}_n\geq 0$, să se stabilească monotonia și să se precizeze dacă șirul este convergent.

b) Determinați $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât $\frac{1}{4x^2+2x+1}\leq\alpha$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{I}_n=0$.

III. (14 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră elipsele de ecuații $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ și $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Pentru fiecare elipsă să se scrie ecuația tangentei în punctul de abscisă 2 și ordonată pozitivă. Să se arate că cele două tangente se intersectează într-un punct situat pe axa Ox. Reprezentați grafic elipsele și tangentele.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv: 3 ore.

Profilurile industrial, agricol, silvic şi sportiv-real

I. (40 puncte)

1) (10 p) Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $3^{x^3-3x^2-4x+9}=\frac{1}{27}$.

2) (10 p) Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ progresie geometrică cu raţia $q\in(0, 1)$ şi $a_1 \neq 0$.

a) Să se determine în funcţie de a_1 şi q suma $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ şi să se calculeze limita sa.

b) Să se determine raţia progresiei, ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3\cdot S_3$.

3) (20 p) Se consideră sistemul: $\begin{cases} 2x-y+z-t=1 \\ x+y+az+t=-1 \\ x-y+z-t=b \end{cases}$, a şi b parametri reali.

a) Să se determine a şi b astfel încât matricea sistemului să fie de rang 2, iar sistemul să fie compatibil.

b) Pentru $a=-1$ şi $b=1$ să se rezolve sistemul.

II. (35 puncte)

1) (15 p) Se consideră funcţia $f\colon (0, \infty)\to \mathbf{R}$, $f(x) = 2\ln x + x^2 - 4x + \mathrm{m}$, m parametru real.

a) Să se stabilească domeniul de derivabilitate al funcţiei şi să se rezolve ecuaţia $f'(x)=0$.

b) Să se discute, în funcţie de parametrul m, numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $f(x)=0$.

2) (20 p) Să se determine primitivele următoarelor funcţii:

a) $f\colon \mathbf{R}\to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x\cdot(3x^2-2x-5)$.

b) $f\colon \mathbf{R}\to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$.

III. (15 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreapta **d** de ecuaţie $4x+3y-12=0$.

a) Determinaţi coordonatele punctelor A şi B, intersecţiile dreptei **d** cu axele Ox, respectiv Oy. Reprezentaţi dreapta. Precizaţi panta dreptei AB.

b) Ştiind că [AB] este latura unui trapez dreptunghic ABCD, cu $m(\hat{A}) = 90°$ şi $BC \parallel AD$, având toate vârfurile pe axele de coordonate, scrieţi ecuaţiile dreptelor BC şi CD. Determinaţi coordonatele punctelor C şi D.

Profilurile economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

I. (40 puncte)

1) (10 p) Se consideră dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

a) Să se determine $n\in\mathbf{N}^*$, ştiind că suma primilor trei coeficienţi ai dezvoltării este 46.

b) Pentru $n = 9$, verificaţi dacă există un termen al dezvoltării care nu conţine pe x.

2) (12 p) Se consideră relaţia $x^2 + 2tx - 3t^2 = 0$.

a) Determinaţi x în funcţie de t.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia:

$$(z^2 + 2z + 1)^2 + 2z(z^2 + 2z + 1) - 3z^2 = 0.$$

3) (18 p) Se consideră sistemul (S) $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases}$.

a) Sistemul admite soluţiile $x=-1$, $y=1$, $z=0$, $t=1$, respectiv $x=1$, $y=0$, $z=-2$, $t=1$? Justificaţi răspunsul.

b) Să se rezolve sistemul.

II. (36 puncte)

1) (24 p) Se consideră expresia $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}$.

a) Să se reprezinte grafic funcţia f definită prin legea $f(x)$.

b) Să se discute în funcţie de parametrul real m numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = \mathrm{m}$.

2) (12 p) a) Se consideră funcţia f: $[-a, a]\to\mathbf{R}$, $(a > 0)$, f continuă. Justificaţi următoarele afirmaţii:

(1) Dacă f este funcţie pară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) Dacă f este funcţie impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

b) Să se calculeze următoarele integrale: $I=\int_{-2}^{2} x^2\cdot e^{|x|}\,\mathrm{d}x$ şi $J=\int_{-2}^{2} x^3\cdot e^{|x|}\,\mathrm{d}x$.

III. (14 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctule M(5, 0) şi elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

a) Reprezentaţi elipsa şi precizaţi, prin calcul, poziţia punctului M faţă de elipsă.

b) Să se determine coordonatele punctelor P situate pe elipsă, astfel încât tangenta în P la elipsă să treacă prin M.

Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsă. Determinaţi pantele tangentelor.

Profilul uman

I. (40 puncte)

1) (14 p) Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $(\frac{1}{x}+2)^2+\frac{1}{x}-10=0$;

b) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$.

2) (14 p)

a) Să se determine numerele reale x și y care verifică simultan relațiile:

$$x\cdot y=192;\quad x\cdot y-x=189.$$

b) Se consideră șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ progresie geometrică cu rația $q=2$. Să se determine $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât $b_n=96$ și suma primilor n termeni ai progresiei să fie egală cu 189.

3) (12 p) Se consideră ecuația $x^4-2x^3-x^2-10x+12=0$.

a) Să se determine soluțiile raționale ale ecuației.

b) Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor complexe.

II. (35 puncte)

1) (23 p) Să se construiască graficul funcției $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{-x^2+3x-2}{x^2}$.

2) (12 p) Să se calculeze integrala $\mathbf{I}=\int_1^2(x^2-x)\cdot e^x\,dx$.

III. (15 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele $\mathbf{d}_1$ și $\mathbf{d}_2$ de ecuații: $\mathbf{d}_1: y=2x+4$, respectiv $\mathbf{d}_2: y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

a) Determinați coordonatele punctului A, intersecția dreptelor $\mathbf{d}_1$ și $\mathbf{d}_2$.
Reprezentați dreptele.
Precizați pantelor dreptelor.

b) Să se determine punctele B și C care îndeplinesc condițiile:

- $B\in\mathbf{d}_1$ și are abscisa -5;
- $C\in\mathbf{d}_2$ și are ordonata -1.

Calculați lungimea segmentului BC.