Cercurile Apollonius de rangul -1

Ion PĂTRAŞCU[1], ***Florentin SMARANDACHE***[2]

Abstract. In this Note, the authors present some properties of Apollonius circles of rank -1 associated to a triangle.

Keywords: Apollonius circle of rank -1, symmedian, harmonic quadrilateral.

MSC 2010: 51M04.

În acest articol, evidenţiem câteva proprietăţi ale *cercurilor Apollonius de rangul* -1 asociate unui triunghi. Articolul este în strânsă legătură cu [1], în care autorii s-au ocupat cu cercurilor Apollonius de rangul k. Să reamintim câteva noţiuni.

Definiţia 1. Se numeşte *ceviană de rangul k* în triunghiul ABC o ceviană AD cu $D \in BC$ şi $\dfrac{BD}{DC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^k$, $k \in \mathbb{R}$.

Mediana este ceviană de rangul 0, iar bisectoarea este ceviană de rangul 1.

Definiţia 2. Ceviana de rang -1 se numeşte *antibisectoare,* iar ceviana exterioară de rang -1 se numeşte *antibisectoare exterioară.*

Antibisectoarea este izotomica bisectoarei.

Definiţia 3. Cercul construit pe segmentul determinat de picioarele antibisectoarei din A şi antibisectoarei exterioare din A ca diametru se numeşte cerc *A - Apollonius de rangul-1* asociat triunghiului ABC.

Unui triunghi îi corespund trei cercuri Apollonius de rangul -1.

Teorema 1. *Cercul A-Apollonius de rangul -1 asociat triunghiului ABC este locul geometric al punctelor M din planul triunghiului cu proprietatea* $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AC}{AB}$.

Pentru demonstraţia acestei teoreme, vezi [1].

Teorema 2. *Cercurile Apollonius de rangul -1 asociate triunghiului ABC trec prin două puncte fixe (fac parte dintr-un fascicol de genul al doilea).*

Teorema 3. *Cercul A-Apollonius de rangul -1 al triunghiului ABC intersectează cercul circumscris acestuia în două puncte ce aparţin respectiv medianei din A a triunghiului şi paralelei dusă prin A la latura BC.*

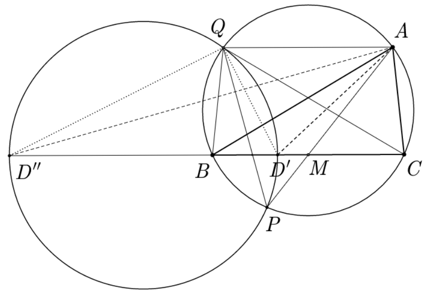
Demonstraţie. Fie Q intersecţia paralelei dusă prin A la BC cu cercul circumscris triunghiului ABC. Patrulaterul $QACB$ este trapez isoscel, deci $QC = AB$ şi $QB = AC$. Deoarece $\dfrac{QB}{QC} = \dfrac{AC}{AB}$, rezultă că punctul Q aparţine cercului A-Apollonius de rangul -1.

Notăm cu P intersecţia medianei AM a triunghiului ABC cu cercul circumscris acestuia. Deoarece mediana împarte triunghiul în două triunghiuri echivalente, avem că aria $\triangle ABM$ este egală cu aria $\triangle ACM$ şi aria $\triangle PBM$ este egală cu aria $\triangle PCM$. Prin adunare, rezultă că aria $\triangle ABP$ este egală cu aria $\triangle ACP$.

[1]Colegiul Naţional ,,Fraţii Buzeşti", Craiova, Romania; *patrascu.ion@yahoo.com*

[2]University of New Mexico, Gallup, USA; *fsmrandache@gmail.com*

Dar aria $\triangle ABP$ este $\frac{1}{2} AB \cdot PB \cdot \sin \widehat{ABP}$, iar aria $\triangle ACP$ este $\frac{1}{2} AC \cdot PC \cdot \sin \widehat{ACP}$. Cum unghiurile $\widehat{ACP}$ şi $\widehat{ABP}$ sunt suplementare, obţinem că $AB \cdot PB = AC \cdot PC$, care se scrie $\frac{PB}{PC} = \frac{AC}{AB}$ şi rezultă că punctul P aparţine cercului A-Apollonius de rangul -1.



Teorema 4. *Cercul A-Apollonius de rang -1 al triunghiului ABC este cerc Apollonius pentru triunghiul QBC , unde Q este intersecţia cu cercul circumscris triunghiului ABC cu paralela dusă prin A la BC.*

Demonstraţie. Patrulaterul $AQBC$ este trapez isoscel, rezultă că $\widehat{BAC} \equiv \widehat{QBC}$, deci QD' va fi bisectoare în BQC (D' este simetricul faţă de M, mijlocul laturii BC, al piciorului bisectoarei dusă din A a triunghiului ABC). Deoarece $D''Q \perp D'Q$ avem că $D''Q$ este bisectoare exterioară pentru $\widehat{BQC}$ şi, în consecinţă, cercul A-Apollonius de rangul -1 este cercul Apollonius al triunghiului QBC.

Observaţii. 1) Din teorema precedentă, rezultă că QP este simediană în triunghiul QBC, deci patrulaterul $QBPC$ este patrulater armonic (a se vedea [2]).

2) Patrulaterul $QBPC$ fiind armonic, PQ este simediană în triunghiul PBC.

3) Cercurile Brocard ale triunghiurilor ABC şi QBC sunt congruente. Într-adevăr, dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi M mijlocul laturii BC, avem că triunghiurile ABC şi QBC sunt simetrice faţă de dreapta OM. În consecinţă, simetricul lui K – centrul simedian al lui ABC faţă de OM va fi K' centrul simedian al lui QBC. Cercurile Brocard având diametrele OK, respectiv OK', din $OK = OK'$ rezultă că acestea sunt congruente (ele sunt simetrice faţă de OM).

Bibliografie

1. I. Pătraşcu, F. Smarandache – *Cercurile Apollonius de rangul k*, Recreaţii matematice, XVIII (2016), nr. 1, pp. 20–23.

2. I. Pătraşcu, F. Smarandache – *Some Properties of the Harmonic Quadrilateral*, Recreaţii matematice, XVI (2014), nr. 2, pp. 99-104.

3. I. Pătraşcu, F. Smarandache – *Complements to ClassicTopics of Circles Geometry*, Pons Editions, Brussels, 2016.