Echivalenţa a două teoreme de concurenţă

Petru BRAICA[1]

Abstract. In this Note, a proof of the logical equivalence of the Steiner theorem and the isologic triangles theorem is provided.

Keywords: triangle, isogonal points, isologic triangles.

MSC 2010: 51M04.

În această Notă este stabilită echivalenţa a două teoreme de concurenţă în plan: *teorema lui Steiner* şi *teorema triunghiurilor izologice.* Prima afirmă că izogonalele a trei ceviene concurente într-un triunghi sunt, de asemenea, concurente [**1**,**2**]. A doua spune că, date două triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$, dacă trei drepte ce trec prin vârfurile A, B, C şi fac cu laturile B_1C_1, C_1A_1, respectiv A_1B_1 un unghi $\alpha \in (0, \pi)$ sunt concurente, atunci şi dreptele ce trec prin vârfurile A_1, B_1, C_1 şi fac cu laturile BC, CA, respectiv AB un unghi de măsură $\pi - \alpha$ sunt concurente [**2**, *Problema 1145*, p. 119].

Menţionăm că peste tot în această notă avem în vedere unghiuri orientate. Echivalenţa teoremelor este concepută în sens logic: fiecare dintre ele implică pe cealaltă.

Proposition 1. *Teorema triunghiurior izologice implică teorema lui Steiner.*

Demonstraţie. În triunghiul ABC considerăm trei ceviene concurente în punctul S. Construim punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ astfel încât $\mathrm{m}(\widehat{SA_1, BC}) = \mathrm{m}(\widehat{SB_1, CA}) = \mathrm{m}(\widehat{SC_1, AB})$ şi fie α valoarea comună a acestor măsuri (Fig. 1). Evident, triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC verifică ipoteza teoremei triunghiurilor izologice şi, deci, dreptele ce conţin vârfurile A, B, C şi fac unghiuri de măsură egală cu $\pi - \alpha$ cu laturile corespunzătoare ale triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt concurente într-un punct, fie el notat S_1.

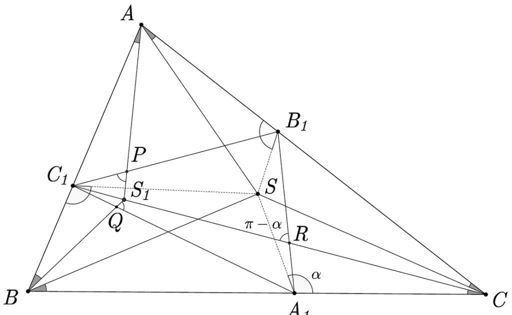

Fig. 1

Vom arăta că S_1 este izogonalul conjugat al lui S. Ne limităm la a arăta că AS_1 este izogonală cu AS. Deoarece $\widehat{SB_1A} \equiv \widehat{SC_1B}$, rezultă că patrulaterul AC_1SB_1 este inscriptibil şi, ca urmare, avem: $\widehat{AC_1B_1} \equiv \widehat{ASB_1}$ sau $\widehat{AC_1P} \equiv \widehat{ASB_1}$. Cum $\widehat{C_1PA} \equiv \widehat{SB_1A}$, cu aceeaşi măsură α, deducem că $\Delta AC_1P \sim \Delta ASB_1$. Deducem că $\widehat{PAC_1} \equiv \widehat{SAB_1}$, adică AP este izogonala cevienei AS. Demonstraţia propoziţiei este completă.

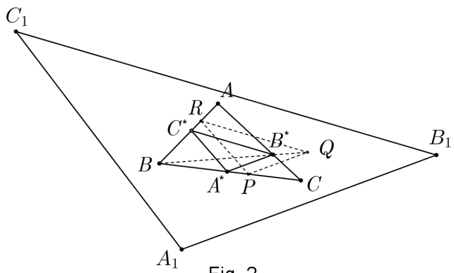

Fig. 2

[1]Profesor, Şcoala Gimnazială ,,Grigore Moisil", Satu Mare; *pbraica@yahoo.com*

Pentru dovedirea implicaţiei inverse, este necesară o scurtă pregătire preliminară.

Lema 1. *Fiind date două triunghiuri* ABC *şi* $A_1B_1C_1$, *există un triunghi* $A^*B^*C^*$ *înscris în* ABC *cu laturile paralele cu laturile corespunzătoare ale triunghiului* $A_1B_1C_1$.

Demonstraţie. Luăm un punct $P \in BC$ şi fie $R \in AB$ punctul în care paralela prin P la A_1C_1 se intersectează cu AB. Paralelele prin P la A_1B_1 şi prin R la B_1C_1 se intersectează în punctul Q. Notăm cu B^* punctul de intersecţie al dreptei BQ cu AC. Apoi, notăm cu A^* punctul în care paralela prin B^* la PQ intersectează BC şi cu C^* punctul în care paralela prin B^* la QR intersectează AB. Se verifică uşor că triunghiul $A^*B^*C^*$ îndeplineşte condiţiile cerute.

Lema 2. *Fiind date două triunghiuri* ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *cu laturile corespunzătoare paralele şi cevienele* AM, BN, CP ($M \in BC, N \in CA, P \in AB$) *concurente în* S, *atunci cevienele* A_1M_1, B_1N_1, C_1P_1 ($M_1 \in B_1C_1, N_1 \in C_1A_1, P_1 \in A_1B_1$) *paralele cu* AM, BN, *respectiv* CP *sunt, de asemenea, concurente.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezută imediat utilizând teorema lui Ceva sub formă trigonometrică şi reciproca ei.

Proposition 2. *Teorema lui Steiner implică teorema triunghiurilor izologice.*

Demonstraţie. Să considerăm două triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$ şi să presupunem că dreptele duse prin vârfurile A_1, B_1, C_1 şi care fac cu laturile BC, CA, respectiv AB unghiuri de aceeaşi măsură α sunt concurente într-un punct S. Construim, conform Lemei 1, triunghiul $A^*B^*C^*$ înscris în triunghiul ABC şi având laturile paralele cu cele ale triunghiului $A_1B_1C_1$. Conform Lemei 2, paralelele la cevienele A_1S, B_1S, C_1S prin vârfurile A^*, B^*, respectiv C^* sunt concurente într-un punct, notat S_1 (Fig. 3). În triunghiul ABC considerăm, conform teoremei lui Steiner, izogoalul S^* al punctului S_1.

Vom arăta că dreptele AS^*, BS^*, CS^* intersectează laturile corespunzătoare ale triunghiului $A_1B_1C_1$ sub unghiuri (orientate) de măsură $\pi - \alpha$, ceea ce va încheia demonstraţia. Să arătăm că $\mathrm{m}\,(\widehat{AS^*, B_1C_1}) = \pi - \alpha$; la fel se procedează şi în cazul dreptelor BS^* şi CS^*. Observăm mai întâi că, din relaţiile $\mathrm{m}(\widehat{B_1S, CA}) = \mathrm{m}(\widehat{C_1S, AB}) = \alpha$, rezultă că patrulaterul $AUSV$ este inscriptibil. Ţinând cont că $S_1B^* \parallel SV$ şi $S_1C^* \parallel SU$, deducem că şi patrulaterul $AC^*S_1B^*$ este inscriptibil. Utilizând şi notaţia $\{X\} = AS^* \cap B^*C^*$, avem: $\mathrm{m}(\widehat{AS^*, B_1C_1}) = \mathrm{m}(\widehat{AXB^*}) = \pi -$ $\mathrm{m}(\widehat{XAB^*}) -$ $\mathrm{m}(\widehat{XB^*A}) = \pi -$ $\mathrm{m}(\widehat{S_1AC^*}) -$ $\mathrm{m}(\widehat{AS_1C^*})$ $= \mathrm{m}(\widehat{AC^*S_1}) = \pi - \mathrm{m}(\widehat{AB^*S_1}) = \pi -$ $\mathrm{m}(\widehat{AVS}) = \pi - \alpha$, deci $\mathrm{m}\,(\widehat{AS^*, B_1C_1}) = \pi - \alpha$. În final, triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt izologice. Teorema triunghiurilor izologice este demonstrată, ceea ce trebuia stabilit.

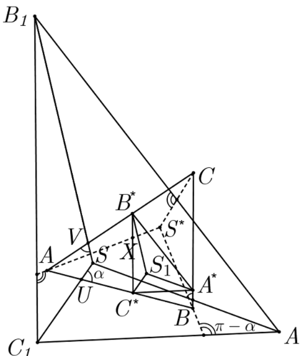

Fig. 3

Bibliografie

1. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.
2. **Gh. Ţiţeica** – *Culegere de probleme de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.