Un criteriu de comutativitate a grupurilor

Marius TĂRNĂUCEANU[1]

Abstract. In this article it is presented a criterion of commutativity for a group G, formulated in terms of the commutativity of subsets of G having a certain number of elements.

Keywords: commutativity, k-subset, product of subsets.

MSC 2010: 20A05, 20K99.

1. Introducere. Studiul proprietăţii de comutativitate ocupă un loc central în cadrul teoriei grupurilor. De-a lungul istoriei au fost identificate numeroase condiţii necesare şi suficiente pentru ca această proprietate să fie satisfăcută (a se vedea, spre exemplu, [**1,2**]).

O nouă astfel de condiţie va fi prezentată în cele ce urmează.

Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $k \in \mathbb{N}^*$. O submulţime A a lui G va fi numită *k-submulţime* dacă $|A| = k$. Date două submulţimi A şi B ale lui G vom nota cu AB produsul acestora (i.e. $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$). De asemenea, vom spune că A şi B *comută* dacă $AB = BA$.

Teoremă. *Pentru $k \in \{1, 2, 3\}$, grupul $(G,\cdot)$ este comutativ dacă şi numai dacă oricare două k-submulţimi ale sale comută.*

Demonstraţie. Evident, dacă grupul $(G,\cdot)$ este comutativ, atunci oricare două k-submulţimi ale sale comută.

Reciproc, avem de arătat că $xy = yx$, oricare ar fi $x, y \in G$. În cazul $k = 1$, acest lucru rezultă imediat din comutativitatea 1-submulţimilor $A = \{x\}$ şi $B = \{y\}$.

Pentru $k = 2$, observăm că putem presupune $x \neq e$ şi $y \neq e$ (în caz contrar egalitatea $xy = yx$ fiind, evident, satisfăcută). Fie 2-submulţimile $A = \{e, x\}$ şi $B = \{e, y\}$. Atunci

$$AB = \{e, x, y, xy\} \quad \text{şi} \quad BA = \{e, x, y, yx\},$$

deci $AB = BA$ implică $xy = yx$.

Pentru $k = 3$, presupunem, prin absurd, că grupul $(G,\cdot)$ nu este comutativ. Atunci, există un element $x \in G$ astfel încât

$$(*) \qquad x \neq x^{-1} \quad \text{şi} \quad x \notin Z(G),$$

unde $Z(G)$ este centrul lui G. Într-adevăr, dacă pentru orice $x \in G$ am avea $x = x^{-1}$ sau $x \in Z(G)$, considerăm a şi b două elemente arbitrare ale lui G. Dacă cel puţin unul din ele aparţine lui $Z(G)$, obţinem $ab = ba$, iar dacă $a = a^{-1}$ şi $b = b^{-1}$, obţinem că

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba,$$

în cazul $ab = (ab)^{-1}$, respectiv

$$ab = ab^3 = [(ab)b]b = [b(ab)]b = [(ba)b]b = (ba)b^2 = ba,$$

[1] Conf.univ.dr., Universitatea ,,Alexandru Ioan Cuza", Iaşi; *tarnauc@uaic.ro*

în cazul $ab \in Z(G)$. Aşadar, G este comutativ, ceea ce contrazice ipoteza.

Fie, deci, $x \in G$ satisfăcând proprietăţile (*) şi $y \in G$ astfel încât $xy \neq yx$. Considerând 3-submulţimile $A = \{e, x, y\}$ şi $B = \{e, x^{-1}, y\}$, avem:

$$AB = \{e, x, y, x^{-1}, y^2, xy, yx^{-1}\} \quad \text{şi} \quad BA = \{e, x, y, x^{-1}, y^2, yx, x^{-1}y\},$$

deci $AB = BA$ implică $xy \in BA$, relaţie ce conduce uşor la o contradicţie.

În concluzie, grupul $(G, \cdot)$ este comutativ.

Notăm că echivalenţa de mai sus nu are loc pentru $k \geq 4$. Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că oricare două 4-submulţimi ale grupului simetric S_3 comută (şi totuşi S_3 nu este comutativ!), lucru ce rezultă uşor din lema următoare.

Lemă. *Fie $(G, \cdot)$ un grup finit şi A, B două submulţimi ale lui G astfel încât $|A| + |B| > |G|$. Atunci $AB = G$.*

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că orice element $x \in G$ poate fi scris sub forma $x = ab$, unde $a \in A$ şi $b \in B$. Fie $x \in G$ şi mulţimea $xB^{-1} = \{xb \mid b \in B\}$. Atunci $|xB^{-1}| = |B|$, deci $|A| + |xB^{-1}| > |G|$.

Presupunem, prin absurd, că $A \cap xB^{-1} = \emptyset$. Atunci, utilizând Principiul includerii şi excluderii, obţinem:

$$|G| \geq |A \cup xB^{-1}| = |A| + |xB^{-1}| > |G|,$$

o contradicţie.

În concluzie, există $a \in A \cap xB^{-1}$, de unde $a = xb^{-1}$ pentru un anumit $b \in B$. Astfel $x = ab$, ceea ce încheie demonstraţia.

În final, remarcăm că Lema asigură comutativitatea oricăror două submulţimi A şi B ale lui G ce satisfac $|A| + |B| > |G|$. De asemenea, menţionăm că ea nu are loc dacă A şi B satisfac $|A| + |B| = |G|$, după cum arată următorul exemplu:

Exemplu. În S_3, considerând $A = B = A_3$, grupul altern de grad 3, avem $AB = A_3 \neq S_3$. Mai general, în orice grup finit G ce conţine un subgrup H de indice 2, considerând $A = B = H$, avem $AB = H \neq G$.

Bibliografie

1. **D. Heuberger, V. Pop** – *Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centrele de excelenţă, clasa a XII-a, volumul I - Algebră*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2014.
2. **M. Tărnăuceanu** – *Probleme de algebră*, volumul I, Editura Universităţii ,,Al. I. Cuza", Iaşi, 2003.