Cercurile Apollonius de rangul al doilea

***Ion PĂTRAŞCU*[1], *Florentin SMARANDACHE*[2]**

Abstract. This article highlights some properties of Apollonius circles of second rank in connection with the adjoint circles and the second Brocard triangle.

Keywords: circumcircle, symmedian, Apollonius circles of second rank, second Brocard triangle.

MSC 2010: 51M04.

În acest articol sunt puse în evidenţă câteva proprietăţi ale cercurilor Apollonius de rangul 2 în legătură cu cercurile adjuncte şi cu triunghiul al doilea Brocard.

Definiţia 1. Se numeşte *cerc Apollonius de rangul 2* relativ la vârful A al triunghiului ABC cercul construit pe segmentul determinat de picioarele simedianelor din A pe BC ca diametru.

Teorema 1. *Cercul Apollonius de rangul 2 relativ la vârful A al triunghiului ABC intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în două puncte ce aparţin respectiv cevienei de rangul 3 (izogonala antibisectoarei) şi cevienei exterioare acesteia.*

Demonstraţia teoremei rezultă din teorema relativă la cercurile Apollonius de rangul k ([**4**, Teorema 6]).

Propoziţia 1. *Cercul Apollonius de rangul 2 relativ la vârful A al triunghiului ABC intersectează cercul circumscris în două puncte Q şi P(Q de aceeaşi parte a lui BC ca şi A). Atunci, (QS este bisectoare în triunghiul QBC, unde S este piciorul simedianei din A a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Q aparţine cercului Apollonius de rangul 2, deci $\frac{QB}{QC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Pe de altă parte, S fiind piciorul simedianei din A, avem: $\frac{SB}{SC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Din aceste relaţii, deducem că $\frac{QB}{QC} = \frac{SB}{SC}$, relaţie care arată că QS este bisectoare în triunghiul QBC.

Observaţii. 1) Cercul Apollonius de rangul 2 relativ la vârful A al triunghiului ABC (Fig. 1) este cerc Apollonius pentru triunghiul QBC. Într-adevăr, am arătat că QS este bisectoare interioară în triunghiul QBC şi cum S', piciorul simedianei exterioare a triunghiului ABC, aparţine cercului Apollonius de rangul 2, avem: $m(\widehat{S'QS}) = 90^\circ$, deci QS' este bisectoare exterioară în triunghiul QBC.

2) QP este simediană în QBC. Într-adevăr, cercul Apollonius de rangul 2 fiind un cerc Apollonius pentru QBC, intersectează cercul circumscris lui QBC după QP, care este simediană în acest triunghi.

Definiţia 2. Se numeşte cerc *adjunct* al unui triunghi cercul care trece prin două vârfuri ale triunghiului şi în unul dintre ele este tangent laturii triunghiului. Vom

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Fraţii Buzeşti", Craiova; *patrascu_ion@yahoo.com*
[2]Prof.dr., New Mexico University, Gallup, USA; *fsmarandache@yahoo.com*

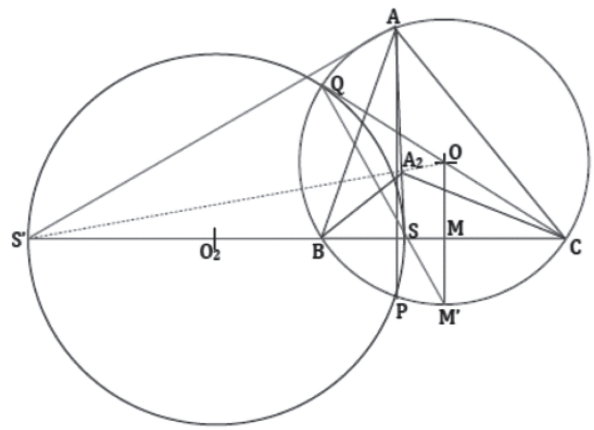

Fig. 1

nota $(\overline{BA})$ cercul adjunct care trece prin B şi A, iar în A este tangent laturii AC. Despre cercurile $(\overline{BA})$ şi $(\overline{CA})$ se spune că sunt *adjuncte* vârfului A al triunghiului ABC.

Definiţia 3. Se numeşte *al doilea triunghi al lui Brocard* triunghiul $A_2B_2C_2$ care are ca vârfuri proiecţiile centrului cercului circumscris triunghiului ABC pe simedianele triunghiului.

Propoziţia 2. *Cercul Apollonius de rangul al doilea relativ la vârful A al triughiului ABC şi cercurile adjuncte relativ la acelaşi vârf A se intersectează în vârful A_2 al celui de-al doilea triunghi Brocard.*

Demonstraţie. Se cunoaşte că cercurile adjuncte $(\overline{BA})$ şi $(\overline{CA})$ se intersectează într-un punct ce aparţine simedianei AS [**1**]; notăm acest punct A_2.

Avem că:

$$\widehat{BA_2S} = \widehat{A_2BA} + \widehat{A_2AB} \qquad \text{şi} \qquad \widehat{A_2BA} = \widehat{A_2AC},$$

deci

$$\widehat{BA_2S} = \widehat{A_2AC} + \widehat{A_2AB} = \widehat{A}.$$

Analog, se obţine $\widehat{CA_2S} = \widehat{A}$. Prin urmare, $(A_2S$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BA_2C}$. Teorema bisectoarei în acest triunghi conduce la $\dfrac{SB}{SC} = \dfrac{BA_2}{CA_2}$. Cum $\dfrac{SB}{SC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$, rezultă că $\dfrac{BA_2}{CA_2} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$, adică A_2 este un punct ce aparţine cercului Apollonius de rangul al doilea.

Demonstrăm că A_2 este vârf al triunghiului al doilea al lui Brocard, adică $OA_2 \perp AS$, O fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Am arătat (Fig. 2) că $m(\widehat{BA_2C}) = 2A$; dacă $\widehat{A}$ este ascuţit, atunci şi $m(\widehat{BOC}) = 2A$, deci patrulaterul OCA_2B este inscriptibil.

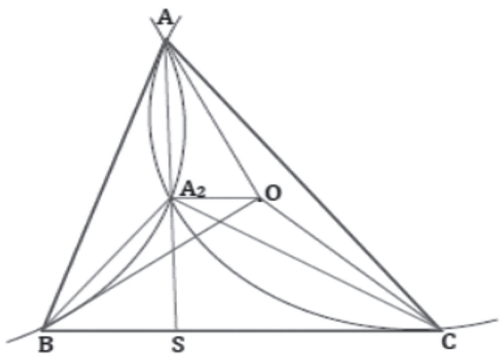

Fig. 2

Deoarece m($\widehat{OCB}$)=90°−m($\widehat{A}$), rezultă că m($\widehat{BA_2O}$) = 90°+ m($\widehat{A}$). Pe de altă parte, m($\widehat{AA_2B}$) = 180°− m($\widehat{A}$), deci m($\widehat{BA_2O}$) + m($\widehat{AA_2B}$) = 270°.

În consecinţă, $OA_2 \perp AS$.

Observaţii. 1. Dacă $m(\widehat{A}) < 90°$, atunci prin A_2 trec patru cercuri remarcabile: cele două cercuri adjuncte vârfului A al triunghiului ABC, cercul circumscris triunghiului BOC (unde O este centrul cercului circumscris) şi cercul Apollonius de rang 2 corespunzător vârfului A.

2. Vârful A_2 al triunghiului al doilea al lui Brocard este mijlocul coardei din cercul circumscris triunghiului ABC care conţine simediana AS.

3. Punctele O, A_2 şi S' (piciorul simedianei exterioare a lui ABC) sunt coliniare. Într-adevăr, am demonstrat că $OA_2 \perp AS$; pe de altă parte, am demonstrat că $(A_2S$ este bisectoare interioară în triunghiul BA_2C. Cum $S'A_2 \perp AS$, din unicitatea perpendicularei în A_2 pe AS, rezultă coliniaritatea evidenţiată.

Problemă deschisă. Cercul Apollonius de rangul 2 relativ la vârful A al triunghiului ABC intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în două puncte P şi Q (P şi A separate de BC). Notăm cu X al doilea punct de intersecţie dintre dreapta AP şi cercul Apollonius de rangul al doilea. Ce se poate afirma despre X? Este X un punct remarcabil în geometria triunghiului?

Bibliografie

1. **R.A. Johnson** – *Advanced Euclidean Geometry*, New York: Dover Publications, Inc. Mineola, 2007.
2. **I. Pătraşcu** – *Axe şi centre radicale ale cercurilor adjuncte unui triunghi*, Recreaţii matematice (România), Anul XII, nr. 1/2010, 45-47.
3. **I. Pătraşcu, F. Smarandache** – *Variance on topics of plane geometry*, Columbus: The Educational Publisher, Ohio, 2013.
4. **I. Pătraşcu, F. Smarandache** – *Cercurile Apollonius de rangul k*, Recreaţii matematice (România), Anul XVIII, nr. 1/2016, 20-23.