O inegalitate relativ la mediane şi înălţimi

Vasile JIGLĂU[1]

Abstract. The aim of this Note is to establish the inequality (2).
Keywords: Euler′s inequality, median, altitude, Brocard angle.

MSC 2010: 51M04.

În Revista *Recreaţii Matematice*, am publicat recent următoarea dublă inegaltate valabilă în orice triunghi:

$$\min\left\{\frac{m_am_b}{h_ah_b},\frac{m_bm_c}{h_bh_c},\frac{m_cm_a}{h_ch_a}\right\}\le\frac{R}{2r}\le\max\left\{\frac{m_am_b}{h_ah_c},\frac{m_bm_c}{h_bh_c},\frac{m_cm_a}{h_ch_a}\right\},\tag{1}$$

notaţiile utilizate fiind cele uzuale ([**3**]).

În legătură cu acest rezultat, ne propunem să arătăm următoarea:

Theoremă. *În orice triunghi au loc inegalităţile*

$$\frac{R}{2r}\ge\sqrt{\frac{m_am_bm_c}{h_ah_bh_c}}\ge\frac{1}{2\sin\omega},\tag{2}$$

unde ω este unghiul Brocard al triunghiului. Prima inegalitate devine egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral, iar a doua dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel.

Demonstraţie. a) Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $a\ge b\ge c$. Ca umare, minimul din (1) este egal cu $\dfrac{m_cm_a}{h_ch_a}$, fapt dovedit în cadrul soluţiei date în [**3**], deci prima inegalitate (1) se rescrie în forma

$$\frac{R}{2r}\ge\frac{m_cm_a}{h_ch_a},\tag{3}$$

cu egalitate doar în cazul triunghiurilor echilaterale.

Pe de altă parte, are loc inegalitatea

$$\frac{R}{2r}\ge\frac{m_b}{h_c},\tag{4}$$

datorată lui *L. Panaitopol* ([**6**]), cu egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral (a se vedea şi [**2**]).

Din (3) şi (4) şi utilizând inegalitatea mediilor, rezultă

$$\frac{R}{2r}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{m_cm_a}{h_ch_a}+\frac{m_b}{h_c}\right)\ge\sqrt{\frac{m_am_bm_c}{h_ah_bh_c}},$$

[1] *jiglau.vasile@yahoo.com*

de unde

$$\frac{R}{2r} \geq \sqrt{\frac{m_a m_b m_c}{h_a h_b h_c}}; \tag{5}$$

evident, avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

b) Pentru a demonstra a doua inegalitate din (1), vor fi utile formulele:
(i) $16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$ (*Heron*),
(ii) $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ şi analoagele,
(iii) $\sin\omega = \dfrac{2S}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ ([**4**; 17.6]).

Cu aceste formule se verfică uşor că au loc şi următoarele identităţi (cunoscute):

$$\frac{1}{2\sin^2\omega} + 1 = \frac{m_a^2}{h_a^2} + \frac{m_b^2}{h_b^2} + \frac{m_c^2}{h_c^2}, \tag{6}$$

$$\frac{m_a^2}{h_a^2} - 1 = \frac{(b^2 - c^2)^2}{16S^2} \text{ şi analoagele.} \tag{7}$$

Pentru exemplificare, să demonstrăm (7). Avem:

$$\begin{aligned}
(7) \Leftrightarrow &\frac{1}{4}[2(b^2 + c^2) - a^2] \cdot \frac{a^2}{4S^2} = 1 + \frac{(b^2 - c^2)^2}{16S^2} \\
&\Leftrightarrow 2a^2(b^2 + c^2) - a^4 = (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4) + (b^4 + c^4 - 2b^2c^2) \\
&\Leftrightarrow 0 = 0.
\end{aligned}$$

Revenind la inegalitatea de demonstrat, avem:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{m_a m_b m_c}{h_a h_b h_c}} \geq \frac{1}{2\sin\omega} \Leftrightarrow \frac{m_a^2}{h_a^2} \cdot \frac{m_b^2}{h_b^2} \cdot \frac{m_c^2}{h_a^2} \geq \frac{1}{16\sin^4\omega} \\
&\overset{(6)}{\Leftrightarrow} \frac{m_a^2}{h_a^2} \cdot \frac{m_b^2}{h_b^2} \cdot \frac{m_c^2}{h_c^2} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{m_a^2}{h_a^2} + \frac{m_b^2}{h_b^2} + \frac{m_c^2}{h_c^2} - 1\right)^2.
\end{aligned}$$

Să adoptăm notaţiile:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{m_a^2}{h_a^2} - 1 \overset{(7)}{=} \frac{(b^2 - c^2)^2}{16S^2}, \\
v &= \frac{m_b^2}{h_b^2} - 1 = \frac{(c^2 - a^2)}{16S^2}, \\
w &= \frac{m_c^2}{h_a^2} - 1 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{16S^2}.
\end{aligned}$$

Evident, u, v, w sunt pozitive, iar a doua inegalitate din (2) este echivalentă cu inegalitatea algebrică

$$4(u + 1)(v + 1)(w + +1) \geq (u + v + w + 2)^2. \tag{8}$$

Aceasta este echivalentă cu

$$\begin{aligned}4uvw + 4(uv + vw + wu) + 4(u + v + w) + 4 \geq (u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2vw + 2wu)+\\ + 4(u + v + w) + 4 \Leftrightarrow 4uvw + 2(uv + vw + wu) \geq u^2 + v^2 + w^2 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow 4uvw + [2(uv + vw + wu) - (u^2 + v^2 + w^2)] \geq 0.\end{aligned}$$

Să observăm că expresia din paranteza pătrată este nulă; într-adevăr, avem: $2(uv+vw + wu) - (u^2 + v^2 + w^2) = 0 \Leftrightarrow 2\sum(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2 - \sum(b^2 - c^2)^4 = 0 \Leftrightarrow 2\sum(a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2)^2-\sum(a^2-b^2)^4 = 0$, care se verifică imediat prin efectuarea calculelor. Ca urmare, inegalitatea (8) este echivalentă cu

$$uvw \geq 0, \tag{9}$$

care este adevărată, căci $u, v, w \geq 0$. În consecinţă, a doua inegalitate din (2) este dovedită.

Cum (9) este echivalentă cu $(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 \geq 0$, în a doua inegalitate se realizează egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel. Demonstraţia teoremei este completă.

Observaţii. 1) Deoarece $m(\omega) \leq 30°$ ([**4**; 17.13]), avem că $\dfrac{1}{2\sin\omega} \geq 1$, iar din (2) obţinem $\dfrac{R}{2r} \geq 1$ (inegalitatea lui Euler).

2) Prima inegalitate din (2) reprezintă o ,,duală" a inegalităţii $\dfrac{m_am_bm_c}{h_ah_bh_c} \geq \dfrac{R}{2r}$ ([**1**;(3.9)]).

3) Inegalitatea (2) este o rafinare a inegalitaţii $\dfrac{R}{2r} \geq \dfrac{1}{\sin\omega}$ (autor *I.C. Miu* [**5**]).

Bibliografie

1. **M. Bencze, N. Minculete, O.T. Pop** – *Certain inequalities for the triangle*, Gazeta Matematică, seria A, 3-4/2012, 86-93.
2. **M.A. Covas** – *La desigualdad de Euler a partir de otras desigualdades entre elementos de un triángulo*, Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 5 (2003).
3. **V. Jiglău** – *Problema L281*, Recreaţii Matematice, nr. 1/2015, p. 87/89 (enunţ) şi nr. 2/2015, p. 166 (soluţie).
4. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.
5. **I.C. Miu** – *Câteva probleme de matematică*, Craiova, 1994.
6. **L. Panaitpol** – *O inegalitate în triunghi*, Gazeta Matematică, 106 (2001), 146-148.