Rafinarea unor inegalităţi geometrice în patrulaterele bicentrice

***Marius DRĂGAN*[1], *Neculai STANCIU*[2]**

Abstract. In this article, a method used in [**3**] for refining certain geometric inequalities in triangles is adapted and applied to the case of bicentric quadrilaterals.

Keywords: quadrilateral, bicentric quadrilateral, Blundon-Eddy inequality.

MSC 2010: 51M16.

În [**3**], se indică o metodă utilă în rafinarea unor inegalităţi relativ la triunghiuri, metodă care are la bază cunoscuta *inegalitate a lui Blundon. Această* metodă se adaptează cu uşurinţă la patrulaterele bicentrice, rolul inegalităţii lui Blundon fiind luat acum de *inegalitatea Blundon-Eddy* [**1**, **2**] pentru patrulatere bicentrice.

Fie $ABCD$ un patrulater bicentric cu $a = AB, b = BC, c = CD, d = AD, 2p = a + b + c + d$, R − raza cercului circumscris şi r − raza cercului înscris.

Teorema 1 (*Blundon-Eddy*)**.** *În orice patrulater bicentric este adevărată următoarea inegalitate dublă:*

$$8r(\sqrt{4R^2+r^2}-r) \le p^2 \le (\sqrt{4R^2+r^2}+r)^2. \tag{1}$$

În partea stângă avem egalitate pentru patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ cu laturile

$a_1 = c_1 = \sqrt{2r\sqrt{4R^2+r^2}-2r^2}$, $b_1 = \sqrt{2r\sqrt{4R^2+r^2}-2r^2} - \sqrt{2r\sqrt{4R^2+r^2}-6r^2}$,
$d_1 = \sqrt{2r\sqrt{4R^2+r^2}-2r^2} + \sqrt{2r\sqrt{4R^2+r^2}-6r^2}$,
iar în partea dreaptă avem egalitate pentru patrulaterul $A_2B_2C_2D_2$ cu
$a_2 = d_2 = \dfrac{1}{2}\left(r + \sqrt{4R^2+r^2} - \sqrt{4R^2-2r^2-2r\sqrt{4R^2+r^2}}\right)$,
$b_2 = c_2 = \dfrac{1}{2}\left(r + \sqrt{4R^2+r^2} + \sqrt{4R^2-2r^2-2r\sqrt{4R^2+r^2}}\right)$.

Scopul articolului este de a găsi cea mai bună constantă k astfel încât inegalitatea

$$F(p) \le f(R,r) - kg(R,r) \tag{2}$$

sau inegalitatea

$$F(p) \ge f(R,r) + kg(R,r) \tag{3}$$

să fie adevărată în orice patrulater bicentric, unde
$F : [p_1, p_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($p_1 = \sqrt{8r\left(\sqrt{4R^2+r^2}-r\right)}, p_2 = \sqrt{4R^2+r^2}+r$ sunt valorile

[1]Profesor, Colegiul Tehnic ,,Mircea cel Bătrân", Bucureşti; *marius.dragan2005@yahoo.com*
[2]Profesor, Şcoala Gimnazială ,,George Emil Palade", Buzău; *stanciuneculai@yahoo.com*

minimă, respectiv maximă luate de semiperimetrul p în inegalitatea Blundon-Eddy), F, f, g sunt funcţii pozitive şi omogene de acelaşi grad, iar F este crescătoare.

Ne vom referi la inegalitatea (2); în acelaşi mod se procedează cu inegalitatea (3). Metoda constă în eliminarea lui p prin înlocuirea inegalităţii (2) cu inegalitatea

$$F(\sqrt{4R^2+r^2}+r) \leq f(R,r) - kg(R,r). \tag{4}$$

Apoi, ţinând seama de omogenitatea funcţiilor F, f, g, se trece la următoarea inegalitatea algebrică în $x = \dfrac{R}{r}$, $x \geq \sqrt{2}$ (căci $R \geq \sqrt{2}r$):

$$F(\sqrt{4x^2+1}+1) \leq f(x,1) - kg(x,1) \tag{5}$$

şi se calculează

$$k_0 = \inf_{x \geq \sqrt{2}} \frac{f(x,1) - F(\sqrt{4x^2+1}+1)}{g(x,1)}, \tag{6}$$

care va fi cea mai bună constantă k pentru care are loc (2). Faptul că inegalităţile (2) şi (4) sunt echivalente (adică au loc pentru aceleaşi valori ale lui k) se poate dovedi cu argumentele utilizate în Teorema 3 din [**3**].

De altfel, faptul că valoarea cea mai bună a lui k este cea dată de (6) se poate arăta şi în alt mod. Presupunem că ar exista k_1, $k_1 > k_0$, o cea mai bună constantă. Atunci, $F(p) \leq f(R,r) - k_1 g(R,r)$ este adevărată pentru orice patrulater bicentric cu raze R şi r. În cazul patrulaterului $A_2B_2C_2D_2$, aceasta se scrie: $F(\sqrt{4R^2+r^2}+r) \leq f(R,r) - k_1 g(R,r)$, de unde deducem că $k_1 \leq [f(R,r) - f(R,r)] \,/\, g(R,r)$ şi urmează imediat că avem $k_1 \leq k_0$, contradicţie.

Observaţie. Menţionăm că în cazul inegalităţii (3) vom avea de calculat

$$k_0 = \inf_{x \geq \sqrt{2}} \frac{F\left(\sqrt{8(\sqrt{4x^2+1}-1)}\right) - f(x,1)}{g(x,1)}. \tag{7}$$

În continuare, vom utiliza metoda prezentată mai sus în scopul determinării celei mai bune constante pentru un număr de inegalităţi geometrice de tipul (2) sau (3).

I. Pentru patrulaterele bicentrice este cunoscută inegalitatea

$$p \leq 2R + \left(4 - 2\sqrt{2}\right) r \qquad \text{([\textbf{2}], Teorema 6).} \tag{8}$$

Ne propunem să găsim constanta k pentru care inegalitatea de forma

$$p \leq 2R + \left(4 - 2\sqrt{2}\right) r - k\frac{r}{R^2}\left(R - \sqrt{2}r\right)^2 \tag{9}$$

este saturată, adică este cea mai bună constantă pentru care această inegalitate are loc pentru orice patrulater bicentric.

Propoziţia 1. *În orice patrulater bicentric este adevărată inegalitatea*

$$p \leq 2R + \left(4 - 2\sqrt{2}\right) r - \left(3 - 2\sqrt{2}\right) \cdot \frac{r}{R^2} \left(R - \sqrt{2}r\right)^2, \tag{10}$$

iar valoarea $k = 3 - 2\sqrt{2}$ *saturează inegalitatea (9).*

Demonstraţie. În cazul nostru, $F(p) = p,\ f(R, r) = 2R + \left(4 - 2\sqrt{2}\right) r,\ g(R, r) = \frac{r}{R^2} \left(R - \sqrt{2}r\right)^2$. Valoarea lui k pentru care (9) este saturată se obţine cu formula (6), ceea ce înseamnă că trebuie să calculăm infimul funcţiei $u(x) = (2x + 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{4x^2+1}) \left(\frac{x}{x - \sqrt{2}}\right)^2,\ x \in (\sqrt{2}, \infty)$. Obţinem imediat că $\lim\limits_{x \to \infty} u(x) = 3 - 2\sqrt{2}$.

Să arătăm că $u(x) \geq 3 - 2\sqrt{2},\ x \in \left(\sqrt{2}, \infty\right)$. Mai întâi, observăm că $2x + 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{4x^2+1} > 0$ (utilizând eventual derivata) şi că $\left(\frac{x}{x - \sqrt{2}}\right)^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}\right)^2 > 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$, deci $u(x) > v(x)$, unde $v(x) = \left(2x + 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{4x^2+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}\right)$. Apoi, avem $v(x) = \left[2(x - \sqrt{2}) + \frac{8 - 4x^2}{3 + \sqrt{4x^2+1}}\right] \cdot \frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}} = -2\left(\frac{2(x + \sqrt{2})}{3 + \sqrt{4x^2+1}} - 1\right)(x + \sqrt{2})$ şi, cum funcţia din paranteza mică este strict crescătoare (se apelează la derivată), rezultă că funcţia v este strict descrescătoare pe $\left(\sqrt{2}, \infty\right)$. Ca urmare, $v(x) > \lim\limits_{x \to \infty} v(x) = \lim\limits_{x \to \infty} u(x) = 3 - 2\sqrt{2}$. În final, obţinem că $\inf\limits_{x \geq \sqrt{2}} u(x) = 3 - 2\sqrt{2}$ şi propoziţia este complet demonstrată.

II. Să găsim acum cea mai bună inegalitate de tipul

$$\alpha R^2 + \beta Rr + \gamma r^2 \leq p^2. \tag{11}$$

Propoziţia 2. *În orice patrulater bicentric* $ABCD$ *este adevărată inegalitatea*

$$\frac{32\sqrt{2}}{3} Rr - \frac{16}{3} r^2 \leq p^2 \tag{12}$$

şi aceasta este cea mai bună inegalitate de tipul (11).

Demonstraţie. Este totuna cu a arăta că are loc inegalitatea $\frac{32\sqrt{2}}{3} Rr - \frac{16}{3} r^2 \leq 8r\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right)$. sau introducând $x = \frac{R}{r}$, cu a arăta că

$$\begin{aligned}
\frac{32\sqrt{2}}{3} x - \frac{16}{3} &\leq 8\left(\sqrt{4x^2+1} - 1\right) \Leftrightarrow 4\sqrt{2}x + 1 \leq 3\sqrt{4x^2+1} \Leftrightarrow \\
32x^2 + 8\sqrt{2}x + 1 &\leq 36x^2 + 9 \Leftrightarrow 4\left(x - \sqrt{2}\right)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

ceea ce este adevărat. Aşadar (12) are loc pentru orice patrulater bicentric.

Să arătăm că (12) este cea mai bună inegalitate de tipul (11). Presupunem că există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice patrulater bicentric avem:

$$\frac{32\sqrt{2}}{3}Rr - \frac{16}{3}r^2 \leq \alpha R^2 + \beta Rr + \gamma r^2 \leq p^2.$$

În cazul particular al patrulaterului cu $a = b = c = d = 1, R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, r = \dfrac{1}{2}$, deducem că $4 \leq \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2\sqrt{2}} + \dfrac{\gamma}{4} \leq 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\alpha + 2\beta + \sqrt{2}\gamma = 16\sqrt{2}$, iar pentru patrulaterul bicentric cu $a = b = 1, c = d = 0, R = \dfrac{1}{2}, r = 0$ se obţine că $0 \leq \dfrac{\alpha}{4} \leq 0$, deci $\alpha = 0$ (*). Ca urmare, avem relaţia $\gamma = 16 - \sqrt{2}\beta$.

Pentru patrulaterul bicentric $A_1B_1C_1D_1$ cu semiperimetrul minim, obţinem:

$$\frac{32\sqrt{2}}{3}Rr - \frac{16}{3}r^2 \leq \alpha R^2 + \beta Rr + \gamma r^2 \leq 8r\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right),$$

care se scrie în forma

$$\frac{32\sqrt{2}}{3}R - \frac{16}{3}r \leq \beta R + \left(16 - \sqrt{2}\beta\right)r \leq 8\sqrt{4R^2 + r^2} - 8r. \tag{13}$$

Deoarece membrul stâng se scrie: $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}x - \dfrac{16}{3} \leq \beta x + 16 - \sqrt{2}\beta \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{2}\right)\left(\beta - \dfrac{32\sqrt{2}}{3}\right) \geq 0$, rezultă că $\beta \geq \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$ (**). Pe de altă parte, membrul drept al inegalităţii (13) se scrie: $\beta x + 16 - \sqrt{2}\beta \leq 8\sqrt{4x^2+1} - 8 \Leftrightarrow \beta\left(x - \sqrt{2}\right) \leq 8\left(\sqrt{4x^2+1} - 3\right) \Leftrightarrow \beta\left(x - \sqrt{2}\right) \leq \dfrac{32(x - \sqrt{2})\left(x + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{4x^2+1} + 3} \Leftrightarrow \beta \leq \dfrac{32\left(x + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{4x^2+1} + 3}, x > \sqrt{2}$. Apelând la derivată, este uşor de văzut că funcţia $x \longrightarrow \dfrac{32\left(x + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{4x^2+1} + 3}$ este crescătoare pe intervalul $\left(\sqrt{2}, \infty\right)$. Deci $\beta \leq \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{32\left(x + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{4x^2+1} + 3} = \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$, aşadar $\beta \leq \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$(***). Din (**) şi (***) rezultă că $\beta = \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$, iar din $\gamma = 16 - \sqrt{2}\beta$ deducem că $\gamma = -\dfrac{16}{3}$.

Prin urmare, am obţinut $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$, $\gamma = -\dfrac{16}{3}$, ceea ce încheie demonstraţia.

III. Vom găsi o rafinare a inegalităţii (12) de forma

$$\frac{32\sqrt{2}}{3}Rr - \frac{16}{3}r^2 + k \cdot \frac{r}{R}\left(R - \sqrt{2}r\right)^2 \leq p^2. \tag{14}$$

Propoziţia 3. *În orice patrulater bicentric este adevărată inegalitatea*

$$\frac{32\sqrt{2}}{3}Rr - \frac{16}{3}r^2 + \frac{16\sqrt{2}}{27}\frac{r}{R}\left(R-\sqrt{2}r\right)^2 \le p^2, \tag{15}$$

aceasta fiind cea mai bună inegalitate de tipul (14).

Demonstraţie. Ţinând cont de (7), cea mai bună constantă pentru inegalitatea (14) este $k_0 = \inf\limits_{x>\sqrt{2}} v(x)$, unde funcţia $x \longrightarrow v(x)$, $x \ge \sqrt{2}$, este dată de

$$v(x) = \frac{F\left(\sqrt{8\left(\sqrt{4x^2+1}-1\right)}\right) - f(x,1)}{g(x,1)} = \frac{8\left(\sqrt{4x^2+1}-1\right) - \frac{32\sqrt{2}}{3}x + \dfrac{16}{3}}{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 \ / \ x} =$$

$$= \frac{\left[8\left(\sqrt{4x^2+1}-3\right) - \frac{32\sqrt{2}}{3}(x-\sqrt{2})\right]x}{\left(x-\sqrt{2}\right)^2} = \frac{32\left(\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{4x^2+1}+3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)x}{x-\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{32\left(3x-\sqrt{8x^2+2}\right)x}{3(x-\sqrt{2})\left(\sqrt{4x^2+1}+3\right)} = \frac{32}{3}\cdot\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{4x^2+1}+3}\cdot\frac{x}{3x+\sqrt{2}\sqrt{4x^2+1}}.$$

Ultima formă arată că funcţia v este crescătoare, fiind produsul a trei funcţii crescătoare (uşor de verificat cu ajutorul derivatei!). Ca urmare, $k_0 = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}} v(x) = \dfrac{16\sqrt{2}}{27}$.

IV. În [**2**], Teorema 9, se arată că în orice patrulater bicentric are loc inegalitatea

$$p^2 \le 4R^2 + 4Rr + \left(8-4\sqrt{2}\right)r^2; \tag{16}$$

demonstraţia revenind la a vedea că $\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2 \le 4R^2+4Rr+\left(8-4\sqrt{2}\right)r^2$, adică $\left(\sqrt{4x^2+1}+r\right)^2 \le 4x^2+4x+8-4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x+3-2\sqrt{2} \ge \sqrt{4x^2+1} \Leftrightarrow \left(3-2\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \ge 0$, ceea ce este adevărat, deoarece $x \ge \sqrt{2}$.

Propoziţia 4. *Relativ la inegalitatea* (16) *sunt adevărate afirmaţiile:*

(i) *este cea mai bună inegalitate de tipul*

$$p^2 \le \alpha R^2 + \beta Rr + \gamma r^2, \tag{17}$$

(ii) *este cea mai bună inegalitate de tipul*

$$p^2 \le 4R^2 + 4Rr + \left(8-4\sqrt{2}\right)r^2 - k\cdot\frac{r}{R}\left(R-\sqrt{2}r\right)^2. \tag{18}$$

Demonstraţie. (i) Presupunem că există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice patrulater bicentric avem:

$$p^2 \le \alpha R^2 + \beta Rr + \gamma r^2 \le 4R^2 + 4Rr + \left(8-4\sqrt{2}\right)r^2.$$

Pentru patrulaterul bicentric cu laturile $a=b=1, c=d=0, R=\dfrac{1}{2}, r=0, p=1$, această dublă inegalitate se scrie $1 \le \dfrac{\alpha}{4} \le 1$, deci $\alpha = 4$. Pentru pătratul $a=b=c=d=1, R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, r=\dfrac{1}{2}, p=2$, ea devine $4 \le \dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2\sqrt{2}}+\dfrac{\gamma}{4} \le 4$, deci avem legătura $\gamma = 8-\beta\sqrt{2}$. Pe de altă parte, în cazul patrulaterului $A_2B_2C_2D_2$ de semiperimetru maxim obţinem:

$$\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2 \le \alpha R^2+\beta Rr+\gamma r^2 \le 4R^2+4Rr+\left(8-4\sqrt{2}\right)r^2$$

sau, prin trecere la $x=\dfrac{R}{r}$, dubla inegalitate

$$\begin{aligned} 4x^2+2+2\sqrt{4x^2+1} &\le 4x^2+\beta x+(8-\beta\sqrt{2}) \le 4x^2+4x+8-4\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ \frac{2}{x}+2\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} &\le \beta+\frac{8-\beta\sqrt{2}}{x} \le 4+\frac{8-4\sqrt{2}}{x}, \end{aligned}$$

de unde, pentru $x \to \infty$, vom obţine $\beta = 4$. Aşadar, $\alpha=\beta=4$ şi $\gamma = 8-4\sqrt{2}$, fapt ce dovedeşte corectitudinea afirmaţiei (i).

(ii) Valoarea lui k pentru care inegalitatea (18) este cea mai bună este dat, în conformitate cu (6), de $k_0 = \inf\limits_{x>\sqrt{2}} w(x)$, unde funcţia $x \longrightarrow w(x)$, $x \ge \sqrt{2}$, este definită prin

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{f(x,1)-F(\sqrt{4x^2+1}+1)}{g(x,1)} = \frac{4x^2+4x+8-4\sqrt{2}-\left(\sqrt{4x^2+1}+1\right)^2}{\left(x-\sqrt{2}\right)^2\ /\ x} = \\ &= \frac{2x\left[2x+\left(3-2\sqrt{2}\right)-\sqrt{4x^2+1}\right]}{\left(x-\sqrt{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Se arată uşor că funcţia w are proprietăţile: $\lim\limits_{x\to\infty} w(x)=0$ şi $w(x) \ge 0, x \in \left(\sqrt{2},\infty\right)$. Ca urmare, $k_0 = 0$. Demonstraţia punctului (ii) şi a propoziţiei se încheie.

Bibliografie

1. **W.J. Blundon, R.H. Eddy** – *Problem 488*, Nieuw Arch. Wiskunde, 26 (1978).
2. **M. Bencze, M. Drăgan** – *Some inequalities in bicentric quadrilateral*, Acta. Univ. Sapientiae, Mathematica, 5, 1 (2013), 20-38.
3. **T. Bîrsan, M. Drăgan, N. Stanciu** – *O metodă de rafinare a unor inegalităţi geometrice*, Recreaţii Matematice, XVIII (2016), 9-14.
4. **L. Fejes-Tóth** – *Inequalities concerning poligons and polyedra*, Duke Math. J., 15 (1948), 817-822.