Triunghiul echilateral şi secţiunea de aur

Temistocle BÎRSAN[1]

Abstract. The aim of this article consists in rendering evident how the golden ratio φ is involved in the geometry of the equilateral triangle.

Keywords: golden ratio, equilateral triangle, Menelaus′ theorem.

MSC 2010: 51M04.

1. *Secţiunea de aur* (*sectio aurea* - latină) sau *secţiunea divină* este numărul $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ şi se notează în mod curent cu φ. Obiectele în alcătuirea cărora este prezent acest număr sunt percepute ca fiind plăcute, frumoase. Numărul φ apare în mod frecvent în natură (aranjarea petalelor, dispunerea seminţelor de floarea soarelui, cochilii spiralate, vortexul galaxiilor etc.) şi în cele mai variate domenii de activitate a omului (arhitectură, arte plastice, muzică, biologie etc.). În matematică, şirul lui Fibonacci şi spirala logaritmică sunt cele mai cunoscute exemple de obiecte ce au legătură cu secţiunea de aur.

Numărul φ este iraţional şi în reprezentarea zecimală se scrie: $\varphi = 1,61803\ldots$ (o infinitate de zecimale, fără o periodicitate a lor). Acest număr este cunoscut şi utilizat în diverse situaţii încă din antichitate. După Euclid, un punct S de pe segmentul AB împarte segmentul în ,,medie" şi ,,extremă" raţie dacă $\dfrac{AB}{AS} = \dfrac{AS}{SB}$; valoarea acestor rapoarte este $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (un calcul simplu!), adică secţiunea de aur.

Privitor la φ, o lectură ce se impune este [**3**].

Scopul acestei Note este de a pune în evidenţă prezenţa numărului φ în cazul triunghiului echilateral.

2. Un prim rezultat în acest sens, preluat din [**1**], [**2**] – prezentat şi cu o demonstraţie pentru completitudinea textului –, este dat de

Propoziţia 1. *Fie ABC un triunghi echilateral, D, E mijloacele laturilor AB, respectiv AC şi F punctul de intersecţie a dreptei DE cu cercul circumscris triunghiului în ordinea $D - E - F$* (Fig.1). *Atunci, avem:* $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Demonstraţie. Notăm $a = BC$ şi $x = EF$. Având în vedere puterea punctului E, obţinem:

$$x\left(x+\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 4x^2 + 2ax = a^2 \Leftrightarrow \left(2x+\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

şi rezultă că $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}a$. Ca urmare,

$$\frac{DF}{DE} = \frac{\frac{a}{2}+x}{\frac{a}{2}} = 1 + \frac{2}{a}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}a = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

adică $\dfrac{DF}{DE} = \varphi$, ceea ce trebuia demonstrat.

[1] Prof.dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi; *t_birsan@yahoo.ro*

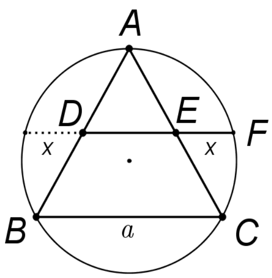

Fig. 1

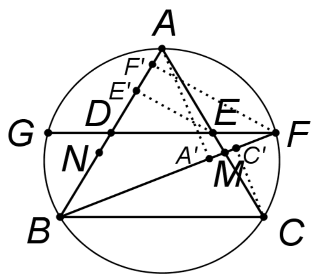

Fig. 2

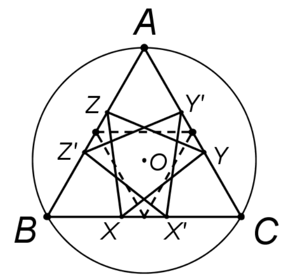

Fig.3

Propoziţia 2. *Se adaugă la notaţile precedente şi* $\{M\} = BF \cap AC$. *Atunci, punctul* M *determină o secţiune de aur a laturii* AC; *mai precis, avem*:

$$\frac{AC}{AM} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{1}$$

Demonstraţie. Să notăm cu h înălţimea triunghiului echilateral. Fie $A' = \mathrm{pr}_{BF}A$, $C' = \mathrm{pr}_{BF}C$, precum şi $E' = \mathrm{pr}_{AB}E$, $F' = \mathrm{pr}_{AB}F$ (Fig. 2). Avem:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AA'}{CC'} = \frac{AA' \cdot BF}{CC' \cdot BF} = \frac{2S_{ABF}}{2S_{CBF}} = \frac{a \cdot FF'}{a \cdot \frac{h}{2}} = \frac{FF'}{\frac{h}{2}}.$$

Din faptul că $\triangle DFF' \sim \triangle DEE'$ rezultă că $FF' = \dfrac{h}{2} \cdot \dfrac{DF}{DE}$. Ţinând seama de Propoziţia 1, obţinem: $FF' = \dfrac{h}{2}\varphi$. Ca urmare, $\dfrac{MA}{MC} = \varphi$, ce este echivalent cu (1).

Observaţii. 1) Dacă G este al doilea punct de intersecţie a dreptei DE cu cercul circumscris şi $\{N\} = CG \cap AB$, atunci, analog cu (1), avem şi faptul că $\dfrac{AB}{AN} = \varphi$. Considerând şi celelalte linii mijlocii, vom obţine în total şase puncte situate câte două pe laturile triunghiului echilateral, care împart latura respectivă în secţiunea de aur.

2) În Fig. 3, aceste şase puncte sunt redenumite şi sunt puse în evidenţă triunghiurile XYZ şi $X'Y'Z'$. Evident, aceste triunghiuri sunt echilaterale şi congruente. Deoarece $\dfrac{BC}{CX} = \dfrac{CA}{AY} = \dfrac{AB}{BZ} = \varphi$ şi $\dfrac{BC}{BX'} = \dfrac{CA}{CY'} = \dfrac{AB}{AZ'} = \varphi$, rezultă, conform teoremei lui Pappus, că triunghiurile XYZ şi $X'Y'Z'$ au acelaşi centru ca şi triunghiul ABC - punctul O.

3) Punctele X şi X' sunt izotomice în raport cu segmentul BC ($\dfrac{CX}{BC} = \dfrac{BX'}{BC} = \varphi \Rightarrow BX' = CX$). Aceeaşi proprietate o au perechile de puncte Y şi Y', Z şi Z'.

4) Lungimile laturilor triunghiurilor XYZ şi $X'Y'Z'$ sunt egale cu $a\sqrt{7 - 3\sqrt{5}}$ (se utilizează teorema cosinusului în $\triangle CXY$).

3. Între triunghiul median $A_1B_1C_1$ ($A_1 \in BC$ etc.), pe de o parte, şi triunghiurile secţiunilor de aur XYZ şi $X'Y'Z'$, pe de altă parte, apar raporturi interesante, pentru precizarea cărora apelăm la numărul φ.

Propoziţia 3. *Au loc următoarele afirmaţii:*

(i) mijloacele laturilor triunghiurilor XYZ şi $X'Y'Z'$ se afla pe laturile triunghiului median;

(ii) mijloacele laturilor triunghiurilor XYZ şi $X'Y'Z'$ împart laturile triunghiului median pe care se află în secţiunea de aur.

Demonstraţie. Notăm aceste mijloace ca în Fig. 4.

(i) Vom arăta că mijlocul R al laturii XY este situat pe latura A_1B_1 a triunghiului median; la fel se procedează şi cu celelalte mijloace.

Fie $\overline{R}$ intersecţia dreptelor A_1B_1 şi XY. Aplicăm teorema lui Menelaus la $\triangle XCY$ şi transversala $A_1 - B_1 - \overline{R}$: $\dfrac{A_1X}{A_1C} \cdot \dfrac{B_1C}{B_1Y} \cdot \dfrac{\overline{R}Y}{\overline{R}X} = 1$. Cum $A_1C = B_1C$ şi $A_1X = B_1Y$, obţinem că $\overline{R}X = \overline{R}Y$, adică $\overline{R}$ coincide cu mijlocul R al laturii XY.

(ii) Pentru faptul că R împarte latura A_1B_1 a triunghiului median în secţiunea de aur, considerăm $\triangle A_1CB_1$ şi transversala $X - Y - R$ şi, conform teoremei lui Menelaus, avem: $\dfrac{XA_1}{XC} \cdot \dfrac{YC}{YB_1} \cdot \dfrac{RB_1}{RA_1} = 1$. Deoarece $XA_1 = YB_1$ şi $YC = XB$, rezultă că $\dfrac{RB_1}{RA_1} = \dfrac{XC}{XB} = \varphi$. Afirmaţia (ii) este dovedită.

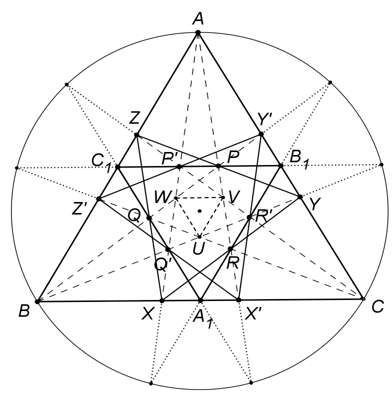

Fig. 4

Observaţii. 1) Punctele P, P'; Q, Q'; R, R' de pe laturile triunghiului median $A_1B_1C_1$ pot fi obţinute şi în alt mod, anume, considerând cercul circumscris lui (cercul lui Euler) şi procedând în modul în care au fost obţinute punctele X, X'; Y, Y'; Z, Z' plecând de la triunghiul echilateral ABC.

Repetând procedeul, în etapa a n-a obţinem un triunghi $A_nB_nC_n$ şi două triunghiuri $A'_{n+1}B'_{n+1}C'_{n+1}$ şi $A''_{n+1}B''_{n+1}C''_{n+1}$ asociate lui, care sunt determinate de punctele ce secţionează laturile B_nC_n, C_nA_n, A_nB_n după tăietura de aur.

2) Şirul triunghiurilor $A_nB_nC_n$ poate fi obţinut prin omotetia $\mathcal{H}(O, -\dfrac{1}{2})$ plecând de la triunghiul echilateral ABC.

4. Să revenim la cevienele AX, AX'; BY, BY'; CZ, CZ' pentru a indica alte proprietăţi ale configuraţiei, ce gravitează în jurul numărului φ.

Vom utiliza în mod frecvent faptul că X şi X' sunt secţiuni de aur şi puncte izotomice ale laturii BC prin egalităţile

$$\frac{BC}{BX'} = \frac{BX'}{BX} = \frac{BX}{XX'} = \varphi = \frac{CX'}{X'X} = \frac{CX}{CX'} = \frac{CB}{CX}, \tag{2}$$

precum şi analoagele lor.

Propoziţia 4. *Fie* $\{U\} = BY \cap CZ'$, $\{V\} = CZ \cap AX'$ *şi* $\{W\} = AX \cap BY'$ (Fig. 4). *Au loc afirmaţiile:*

(i) $BC \| YZ' \| Y'Z$, $\dfrac{BC}{YZ'} = \dfrac{YZ'}{Y'Z} = \varphi$ şi $BC = YZ' + Y'Z$.

(ii) punctul U secţionează cevienele BY şi CZ' după tăietura de aur, adică $\dfrac{BY}{BU} = \varphi$ şi $\dfrac{CZ'}{CU} = \varphi$;

(iii) punctele V şi W se află pe segmentul YZ' şi sunt tăieturii de aur şi puncte izotomice ale lui;

(iv) $\dfrac{XX'}{VW} = \varphi$,

precum şi afirmaţiile analoage lor.

Demonstraţie. (i) Ţinând seama de relaţii de tipul (2), rezultă că $BC \| YZ' \| Y'Z$. Ca urmare, $\triangle ABC \sim \triangle AZ'Y \sim \triangle AZY'$, raportul lor de asemămare fiind φ; deci $\dfrac{BC}{Z'Y} = \dfrac{Z'Y}{ZY'} = \varphi$. Apoi, $BC = \varphi Z'Y = Z'Y + (\varphi - 1)Z'Y = Z'Y + (\varphi - 1)\varphi ZY' = Z'Y + ZY'$.

(ii) Se aplică teorema lui Menelaus la $\triangle ABY$ şi transversală $U - C - Z'$ şi, ţinând cont de formule de tipul (2), se obţine prima relaţie. Analog, se obţine şi a doua relaţie.

(iii) Afirmaţiile acestui punct rezultă din faptul că poziţiile punctelor Z', W, V, Y pe segmentele AB, AX, AX', respectiv AC sunt date de $\dfrac{AB}{AZ'} = \varphi$, $\dfrac{AX}{AW} = \varphi$, $\dfrac{AX'}{AV} = \varphi$, respectiv $\dfrac{AC}{AY} = \varphi$.

(iv) Din $\triangle AXX' \sim \triangle AWV$, rezultă că $\dfrac{XX'}{WV} = \dfrac{AX}{AW}$, deci $\dfrac{XX'}{WV} = \varphi$.

5. Comentariu. Toate elementele configuraţiei ce este subiectul acestei Note pot fi construite cu rigla şi compasul. Cercul participă o singură dată în mod esenţial în construcţia configuraţiei: la început, în postura de cerc circumscris triunghiului echilateral dat. Apoi se retrage cu discreţie din ,,joc", dar contribuţia sa la estetica, la armonia configuraţiei este decisivă.

Bibliografie

1. **G. Odom, J. van Craats** – *Elementary Problem 3007*, American Math. Monthly, 90 (1983), 482; solution, 93 (1986), 572.
2. **K. Hofstetter** – *A simple Construction of the Golden Section*, Forum Geometricorum, 2 (2002), 65-66.
3. **M. Livio** – *Secţiunea de aur. Povestea lui phi, cel mai uimitor număr*, Humanitas, Bucureşti, 2007.