Proprietăţi ale razelor cercurilor mixtliniare exînscrise

Neculai ROMAN[1]

Abstract. A couple of identities for the radii of the mixtlinear excircles to a triangle are established.

Keywords: inradius, circumradius, exradii, mixtilinear excircles.

MSC 2010: 51M04.

Fie triunghiul ABC, r, R – razele cercurilor înscris şi circumscris, r_a, r_b, r_c – razele cercurilor exînscrise şi R_1, R_2, R_3 – razele cercurilor mixtliniare exînscrise triunghiului ABC. Amintim, că R_1 este raza cercului tangent semidreptelor $[AB, [AC$ şi tangent exterior cercului circumscris. Analog se introduc R_2 şi R_3.

În [**2**] sunt indicate câteva proprietăţi ale razelor R_1, R_2 şi R_3, iar în [**1**] sunt prezentate un număr de proprietăţi ale razelor r_1, r_2, r_3 ale cercurilor mixtliniare înscrise (r_1 este raza cercului tangent semidreptelor $[AB, [AC$ şi tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC şi analog se introduc r_2, r_3).

Scopul acestei Note este de a prezenta noi proprietăţi ale razelor cercurilor mixtliniare exînscrise, altele decât cele din [**2**]. Vor fi utilizate tehnici de lucru similare celor din [**1**].

Sunt cunoscute formulele pentru razele cercurilor mixtliniare exînscrise ([**2**]):

$$R_1 = \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{rbc}{(p-a)^2};\ R_2 = \frac{r_b}{\cos^2 \frac{B}{2}} = \frac{rca}{(p-b)^2};\ R_3 = \frac{r_c}{\cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{rab}{(p-c)^2}. \tag{1}$$

Se va apela în mod curent la identităţile:

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr, \tag{2_1}$$

$$abc = 4RS = 4Rpr, \tag{2_2}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr), \tag{2_3}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr), \tag{2_4}$$

$$a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 = 2pr(2R - r), \tag{2_5}$$

$$ab(p-a)(p-b) + bc(p-b)(p-c) + ca(p-c)(p-a) = r^2[p^2 + (4R+r)^2], \tag{2_6}$$

cât şi la următoarele relaţii relativ la razele cercurilor exînscrise ([**3**]):

$$\sum r_a = 4R + r,\ \ \sum r_b r_c = p^2,\ \ r_a r_b r_c = p^2 r; \tag{3}$$

$$\sum r_a^3 = (4R + r)^3 - 12Rp^2 \tag{4}$$

((4) rezultă din identitatea $x^3+y^3+z^3 = 3xyz+(x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)]$).

[1] Profesor, Şcoala Gimnazială ,,Vasile Alecsandri", Mirceşti (Iaşi); *romanneculai@yahoo.com*

Propoziţia 1. *În orice triunghi au loc identităţile*:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{p^2}[(4R+r)^3 + p^2r - 8p^2R]; \tag{5}$$

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 = 8R(2R-r); \tag{6}$$

$$R_1R_2R_3 = 16R^2r. \tag{7}$$

Demonstraţie. Folosind formulele (1), (3), (4) şi relaţiile $r_a = p\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$ etc., avem:

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &= \sum \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \sum r_a\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}\right) = \sum r_a + \sum r_a \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \\ &= \sum r_a + \sum r_a\left(\frac{r_a}{p}\right)^2 = \sum r_a + \frac{1}{p^2}\sum r_a^3 = 4R + r + \frac{1}{p^2}[(4R+r)^3 - 12Rp^2] \end{aligned}$$

de unde, prin calcul simplu, obţinem (5).

$$\begin{aligned} \sum R_1R_2 &\overset{(1)}{=} \sum \frac{rbc}{(p-a)^2}\cdot\frac{rca}{(p-b)^2} = r^2abc\sum\frac{c\cdot p^2(p-c)^2}{S^4} = \frac{abc}{S^2}\sum c(p-c)^2 \\ &\overset{(2_5)}{=} \frac{4Rrp}{p^2r^2}\cdot 2pr(2R-r) = 8R(2R-r) \end{aligned}$$

$$R_1R_2R_3 \overset{(1)}{=} \prod \frac{rbc}{(p-a)^2} = r^3(abc)^2\prod\frac{1}{(p-a)^2} \overset{(2_2)}{=} r^3(4RS)^2\cdot\frac{p^2}{S^4} = 16R^2r.$$

Propoziţia 2. *În orice triunghi au loc identităţile*:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R} \text{ (vezi [4])}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}\cdot\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_3}\cdot\frac{1}{R_1} = \frac{(4R+r)^3 + p^2r - 8p^2R}{16p^2R^2r}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}\cdot\frac{1}{R_3} = \frac{1}{16R^2r}. \tag{10}$$

Demonstraţie. Folosind relaţiile (5), (6) şi (7), obţinem ecuaţia:

$$x^3 - \frac{(4R+r)^3 + p^2r - 8p^2R}{p^2}x^2 + 8R(2R-r)x - 16R^2r = 0, \tag{11}$$

cu soluţiile R_1, R_2 şi R_3. Dacă în (11) efectuăm substituţia $x = \dfrac{1}{y}$, obţinem ecuaţia:

$$y^3 - \frac{2R-r}{2Rr}y^2 + \frac{(4R+r)^3 + p^2r - 8p^2R}{16p^2R^2r}y - \frac{1}{16R^2r} = 0 \tag{12}$$

ce are soluţiile $\dfrac{1}{R_1}, \dfrac{1}{R_2}$ şi $\dfrac{1}{R_3}$ şi, utilizând relaţiile lui Viète, obţinem relaţiile (8)-(10).

Propoziţia 3. *În orice triunghi sunt adevărate identităţile:*

$$\frac{r_a}{R_1}+\frac{r_b}{R_2}+\frac{r_c}{R_3}=\frac{4R+r}{2R}, \tag{13}$$

$$\frac{r_a}{R_1}\cdot\frac{r_b}{R_2}+\frac{r_b}{R_2}\cdot\frac{r_c}{R_3}+\frac{r_c}{R_3}\cdot\frac{r_a}{R_1}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2}, \tag{14}$$

$$\frac{r_a}{R_1}\cdot\frac{r_b}{R_2}\cdot\frac{r_c}{R_3}=\frac{p^2}{16R^2}. \tag{15}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned}
\sum\frac{r_a}{R_1}&=\sum\cos^2\frac{A}{2}=\sum\frac{p(p-a)}{bc}\\
&=\frac{p}{abc}\sum a(p-a)=\frac{1}{4Rr}(2p^2-a^2-b^2-c^2)\overset{(2_3)}{=}\frac{4R+r}{2R},\\
\sum\frac{r_a}{R_1}\cdot\frac{r_b}{R_2}&=\sum\cos^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}\\
&=\sum\frac{p^2(p-a)(p-b)}{abc^2}=\sum\frac{p^2}{a^2b^2c^2}\sum ab(p-a)(p-b)\\
&\overset{(2_6)}{=}\frac{1}{16R^2r^2}\cdot r^2[p^2+(4R+r)^2]=\frac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2},\\
\frac{r_a}{R_1}\cdot\frac{r_b}{R_2}\cdot\frac{r_c}{R_3}&=\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\\
&=\frac{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}=\frac{p^2S^2}{16R^2S^2}=\frac{p^2}{16R^2}.
\end{aligned}$$

Propoziţia 4. *În orice triunghi sunt adevărate identităţile:*

$$\frac{R_1}{r_a}+\frac{R_2}{r_b}+\frac{R_3}{r_c}=\frac{(4R+r)^2+p^2}{p^2}, \tag{16}$$

$$\frac{R_1}{r_a}\cdot\frac{R_2}{r_b}+\frac{R_2}{r_b}\cdot\frac{R_3}{r_c}+\frac{R_3}{r_c}\cdot\frac{R_1}{r_a}=\frac{8R(4R+r)}{p^2}, \tag{17}$$

$$\frac{R_1}{r_a}\cdot\frac{R_2}{r_b}\cdot\frac{R_3}{r_c}=\frac{16R^2}{p^2}. \tag{18}$$

Demonstraţie. Se procedează ca în Propoziţia 2.

În încheiere, propunem cititorului demonstrarea următoarelor identităţi:
1) $\sum aR_1=\frac{4R}{p}[(4R+r)^2-2p^2]$, 2) $\sum\frac{bc}{R_1}=\frac{1}{r}(p^2-8Rr-2r^2)$.

Bibliografie

1. **R. Bairac** – *Cercuri semiînscrise în triunghi*, Delta (Chişinău), nr. 1/2006, 12–15.
2. **M. Bencze** – *About Special Circles*, Octogan Math. Mag., 16(2008), no.1A, 224-227.
3. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, 1958.
4. **N. Roman** – *Problema O:1152*, G.M.B - 3/2007, 163.