Problema celor 17 cercuri

Gheorghe MITROAICA[1]

Abstract. In this Note it is indicated a solution involving 17 steps to the following problem: Given a circle of radius 1, construct the concentric circle with radius $\sqrt{7}$, using a compass only.

Keywords: circle, compass.

MSC 2010: 51M04.

În prima sa carte despre numărul 7, *Un număr sprijină lumea*, autorul a făcut câteva conexiuni ale eroului cărţii cu geometria. În acest sens ar fi, poate, interesant ca şi pe această ultimă lucrare s-o ,,colorăm" geometric cât mai interesant. Este cazul, deci, să intre în arenă... ,,radical din 7". După îndelungi căutări am găsit următoarea problemă:

Se dă cercul de rază egală cu unitatea şi se cere ca pornind de la el să se construiască, numai cu compasul, cercul concentric cu raza egală cu radical din şapte (numită *Problema celor 17 cercuri*).

Soluţia autorului foloseşte pe cea a *Problemei 265* din Revista Matematică şi Fizică din septembrie 1952, autor *N. Patraulea*, care trata găsirea numai cu ajutorul compasului a mijlocului unui segment determinat de două puncte date.

În esenţă, problema enunţată constă în a găsi un segment a cărui lungime să măsoare $\sqrt{7}$. Fireşte, primul cerc al problemei este chiar cercul de rază unitate de la care pornim. Începem prin a ne ,,agăţa" de un punct oarecare A al circumferinţei date. Căpătăm astfel o direcţie AO şi pot să intre în scenă piruetele compasului:

1) este cercul de rază unitatea, pe care se defineşte problema;

2) cu raza AO şi centrul în A se descrie un arc care taie cercul dat în B;

3) cu centrul în B şi cu aceeaşi rază se punctează C în acelaşi mod;

4) absolut identic, cu centrul în C se încrusteată D, diametral opus lui A;

5) cu centrul în A şi raza AD se descrie un amplu arc de cerc...;

6) cu centrul în D şi raza BD se descrie arcul care-l intersectează pe precedentul în punctele E şi F;

7) cu centrul în E şi raza DE se descrie un arc de cerc...;

8) cu centrul în F şi raza $FD = DE$ se descrie un arc de cerc care îl intersectează pe precedentul în M.

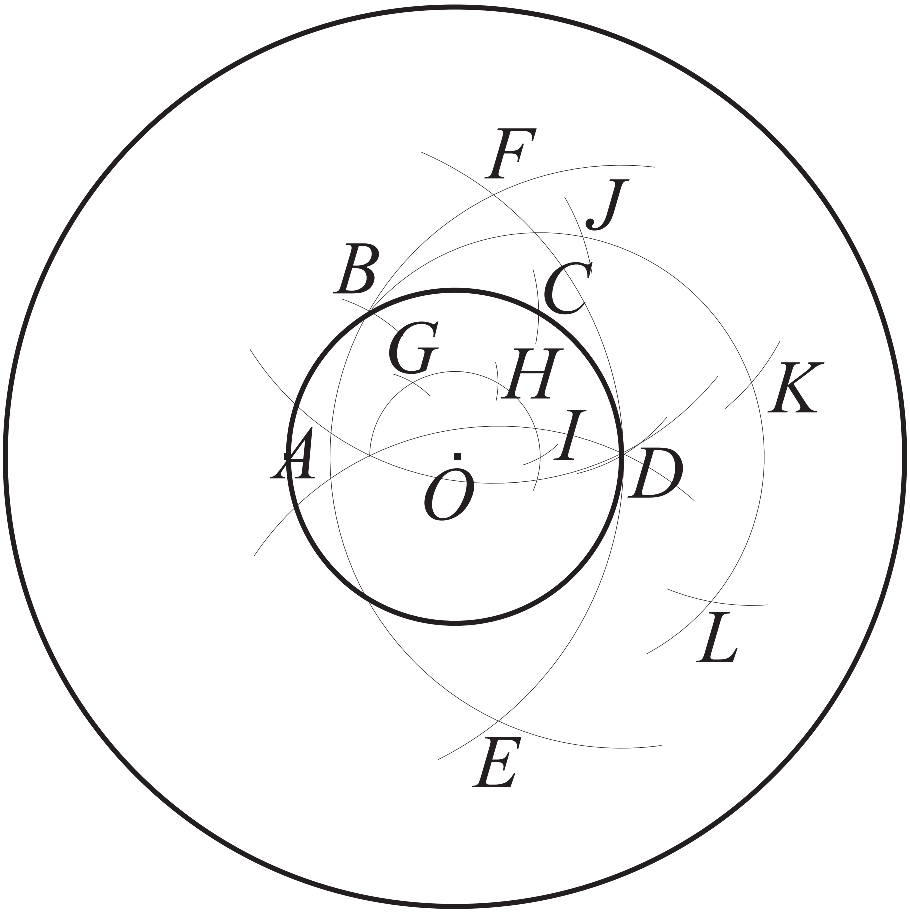
Aici se încheie raţionamentul Problemei 265; ne oprim şi noi pentru a verifica faptul că M este mijlocul segmentului OA. Pentru aceasta să-i calculăm puterea faţă de cercurile cu centrele în E şi F:

$$AM \cdot AD = AE^2 - DE^2 = 2^2 - \left(1 \cdot \sqrt{3}\right)^2 = 1,$$

unde s-a ţinut seama de faptul că $DE = BD$ este latura triunghiului echilateral înscris în cecul cu raza unitatea. Din $AM \cdot AD = 1$, AD fiind egal cu 2, rezultă că $AM = \frac{1}{2}$, ceea ce trebuia verificat.

Aşadar, am folosit compasul de 8 ori pentru a găsi mijlocul segmentului AO. Urmează cea de-a 9-a piruetă a compasului, care înseamnă şi debutul părţii originale

[1]Dr. Fizică, Bucureşti; *mitroaicatony@yahoo.it*



a rezolvării problemei. Un pas mic pentru compas, un pas mare pentru rezolvarea problemei...

9) Cu centrul în O şi raza MO se descrie mai mult decât un semicerc, având un capăt în M;

10) se poartă raza MO pe acest cerc şi se marchează punctul G;

11) cu centrul în G şi aceeaşi rază purtată în continuare se capătă punctul H;

12) cu centrul în H şi aceeaşi rază se fixează I, coliniar cu A, M, O. Să evaluăm momentul! Ca geometri de... nota 7 cel puţin, dibuim că ,,triunghiurile" ABM şi BMI sunt dreptunghice. Şi dacă triunghi dreptunghic e, atunci Pitagora e...! Avem, deci: din AMB relaţia

$$BM^2 = AB^2 - AM^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Din triunghiul BMI, un pont...

$$BI^2 = BM^2 + MI^2 = \frac{3}{4} + 1^2 = \frac{7}{4}$$

sau $BI = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Deci, ,,mână birjar"! E de...13 drumul, dar ştim de-acum sfârşitul.

13) cu centrul în I şi raza BI se descrie mai mult decât un semicerc care trece prin B;

14) cu centrul în B şi raza BI se intersectează semicercul 13 în J;

15) similar, se pică pe punctul K (centrul în J, raza BI);

16) ţinând-o tot aşa, ne punem în posesia celui mai dorit punct de către rezolvitor, L, diametral opus lui B, coliniar deci cu acesta şi cu I. Am obţinut deci: $BL = 2BI = \sqrt{7}$, adică exact raza cercului de construit cum cere problema;

17) cel mai căutat, dar şi cel mai facil de trasat cerc, cercul cu centrul în O şi raza $\sqrt{7}$.

O problemă ca pentru 7, ,,numărul fără egal", speră autorul.

Bibliografie

1. **Gh. Mitroaica** – *Un număr sprijină lumea*, Soc. Ştiinţă & Tehnică SA, Bucureşti, 1998.
2. **N. Patraulea** – *Problema 265*, Revista Matematică şi Fizică, 1952, nr.9, 223-224.
3. **A. Tóth** – *Noţiuni de teoria construcţiilor geometrice*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1963.

Nota Redacţiei. Pentru cititorii revistei, adăugăm un comentariu.

Teoria construcţiilor geometrice este un capitol fascinant al geometriei. Grecii antici au dat o mare importanţă construcţiilor geometrice, în particular celor cu rigla şi compasul; lor le datorăm cele trei probleme celebre: *dublarea cubului, trisecţia unghiului* şi *cuadratura cercului.* Danezul **Georg Mohr** în 1672 şi italianul **Lorenzo Mascheroni** în 1797 au arătat, în mod independent, rezultatul următor (numit *teorema Mohr-Mascheroni*): *orice construcţie ce poate fi efectuată cu rigla şi compasul se poate face numai cu compasul.* Posibilitatea teoretică afirmată în această teoremă nu exclude interesul pentru realizarea efectivă a unei construcţii numai cu compasul (adică indicarea etapelor ce trebuie parcurse pentru ca de la datele problemei să se ajungă, utilizând numai compasul, la elementele cerute).

În Notă este utilizată o construcţie a mijlocului unui segment dată de *N. Patraulea.* Observăm că orice altă construcţie a mijlocului o poate înlocui, etapele 9-17 de mai sus rămânând aceleaşi. În [**3,** p.42] se indică o împărţíre cu compasul a unui segment în n părţi egale dată de L. Mascheroni.