Curbe de lărgime constantă. Triunghiul lui Reuleaux

Temistocle BÎRSAN[1]

Abstract. The aim of this article consists in informing the readers on the curves of constant width and - especially - on the Reuleaux triangle with its applications.

Keywords: curve of constant width, Reuleaux triangle, Barbier theorem.

MSC 2010: 97G10.

Cercul are proprietatea că *distanţa dintre două tangente paralele ale sale este aceeaşi, oricare ar fi perechea de tangente considerată*; anume, această distanţă este lungimea diametrului cercului. Se pune întrebarea: această proprietate este caracteristică cercului? Răspunsul este negativ, iar aprofundarea acestei chestiuni ne conduce la o clasă remarcabilă de curbe având proprietăţi interesante şi aplicaţii importante în tehnică – este vorba de *curbele de lărgime constantă*.

Această prezentare are scop informativ. Pentru a face mai simplă expunerea vom considera că toate curbele ce vor interveni sunt *convexe* (în fapt, prin aceasta nu s-a impus o restricţie, deoarece curbele la care ne vom referi sunt în mod necesar convexe). Vom face apel în mod curent la cunoştinţe elementare privind curbele şi mulţimile convexe [**1**, **4**].

1. Definiţii şi exemple. Dată o curbă plană închisă $\mathcal{C}$ şi o direcţie Δ, se numeşte *lărgimea curbei* $\mathcal{C}$ *în direcţia* Δ *distanţa* d *între dreptele de sprijin*[1] d_1 *şi* d_2 *ale curbei* $\mathcal{C}$ *ce sunt paralele între ele şi perpendiculere pe* Δ (fig. 1). *Dacă lărgimea curbei* $\mathcal{C}$ *este aceeaşi în orice direcţie, se spune că ea este de lărgime constantă.*

Există o clasă vastă de curbe de lărgime constantă. Cercul este cel mai simplu exemplu de acest fel. Un alt exemplu simplu este *triunghiul lui Reuleaux*[2]: cu centrul în fiecare vârf al triunghiului echilateral ABC se construieşte arcul de cerc ce uneşte celelalte două vârfuri rămase şi se obţine triunghiul curbiliniu format din arcele $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ (fig. 2). Dacă l este lungimea laturii triunghiului echilateral, pentru triunghiul lui Reuleaux obţinem imediat că are: 1) lărgimea l, 2) perimetrul πl, 3) aria $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})l^2$, 4) unghiurile din vârfuri de 120°, 5) razele cercurilor circumscris şi înscris egale cu $\frac{l}{\sqrt{3}}$, respectiv $\left(1 - \frac{l}{\sqrt{3}}\right) l$.

[1] Prof.dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi; *t_birsan@yahoo.com*

[1] O dreaptă de sprijin este o dreaptă ce are cel puţin un punct comun cu curba şi o lasă de o parte a ei. O curbă închisă şi convexă are două şi numai două drepte de sprijin paralele cu o direcţie dată.

[2] După numele lui *Franz Reuleaux* (1829-1905), inginer german considerat creatorul mecanicii moderne, care a studiat această formă în scop aplicativ [**2**]. Forma este cunoscută, însă, din Evul Mediu: apare în mai multe manuscrise ale lui *Leonardo da Vinci* sau în arhitectură, ca profil de ferestre ale unor catedrale. *Leonhard Euler* a studiat în lucrarea *De curvis triangularibus* curbele triunghiulare şi cele de lărgime constantă (numite de el *orbiforme*) [**5**].

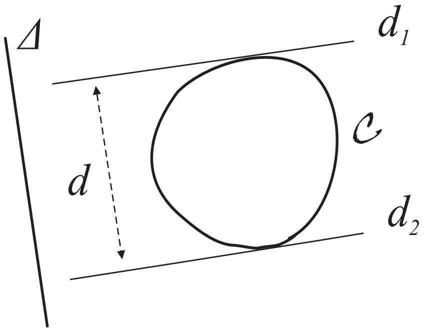

Fig. 1

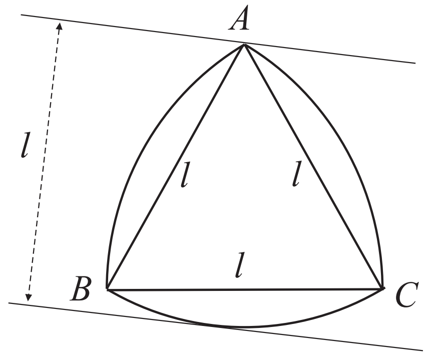

Fig. 2

Modul în care a fost obţinut triunghiul Reuleaux poate fi utilizat pentru a găsi noi curbe de lărgime constantă. În fig. 3 este indicat un pentagon curbiliniu de lărgime constantă obţinut având la bază un pentagon regulat; arcele care-l mărginesc sunt arce de cerc cu centrele în unul din vârfurile pentagonului şi care unesc extremităţile laturilor opuse. Evident, putem vorbi de poligoane curbilinii de lărgime constantă cu un număr impar de arce - *poligoane Reuleaux,* o generalizare a triunghiului Reuleaux. Toate aceste curbe sunt alcătuite dintr-un număr finit de arce de cerc egale, iar lărgimea lor este egală cu diametrul poligonului regulat de bază. De altfel, s-a arătat că poligoanele Reuleaux sunt singurele curbe de lărgime constantă formate dintr-un număr finit de arce de cerc de aceeaşi lungime. Menţionăm că în Marea Britanie monedele de 20 şi 50 pence au forma de heptagoane Reuleaux. Şi în alte ţări circulă astfel de monede: Botswana, Canada, Cipru, Iordania, Mauritania [**5**].

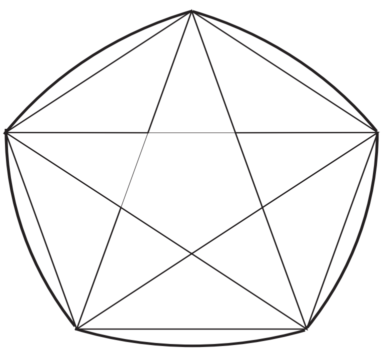

Fig. 3

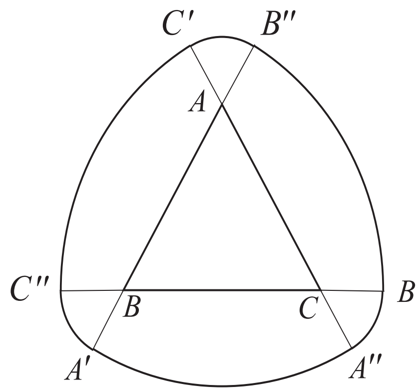

Fig. 4

Curbele de lărgime constantă date ca exemplu mai sus au vârfuri, anume, punctele comune arcelor ce compun curba sunt puncte unghiulare. Se poate însă trece cu uşurinţă la poligoane curbilinii cu lărgime constantă fără vârfuri (netede). În fig.4 este ilustrat acest procedeu de trecere pe cazul triunghiului Reuleaux; o construcţie similară se poate face pentru oricare poligon Reuleaux. Arcul $\widehat{BC}$ din fig. 2 este înlocuit cu arcul $\widehat{A'A''}$ concentric cu el, dar de rază $l + l_0$ ($l_0 > 0$ dat) şi la fel se construiesc arcele $\widehat{B'B''}$, $\widehat{C'C''}$. Se închide curba cu arcele de cerc $\widehat{B''C'}$, $\widehat{C''A'}$, $\widehat{A''B'}$ cu centrele în vârfurile A, B, respectiv C şi de rază l_0. Evident, curba obţinută, paralelă cu triunghiul Reuleuax, are lărgimea $l + l_0$ şi este netedă.

Utilizând procedee asemănătoare, se pot construi curbe de lărgime constantă pornind cu poligoane neregulate având un număr par de laturi. În fig. 5 se consideră un patrulater complet $ABCDEF$ (echivalent, patru drepte care se intersectează) şi apoi un punct P_1 pe dreapta AB. Se construiesc succesiv următoarele arce de cerc: $\widehat{P_1P_2}$ cu centrul în F, $\widehat{P_2P_3}$ cu centrul în D, $\widehat{P_3P_4}$ cu centrul în E, ... , $\widehat{P_8P_1}$ cu centrul în B. Este simplu de arătat că ultimul arc construit are ca extremitate punctul P_1 şi că $P_1P_5 = P_2P_6 = P_3P_7 = P_4P_8$. Ca urmare, curba închisă obţinută este formată din arce (neegale) de cerc şi are lărgime constantă. Procedeul este valabil si pentru un număr oarecare (par sau impar) de drepte care se intersectează.

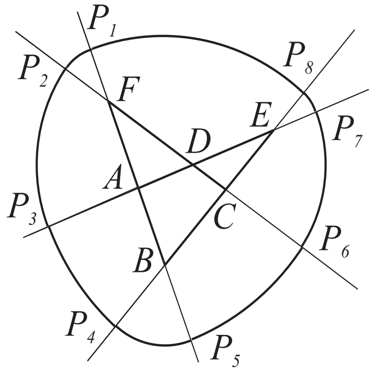

Fig. 5

Aşadar, există o infinitate de curbe de lărgime constantă. Observăm că toate curbele de mai sus sunt formate din arce de cerc. Menţionăm că acest fapt nu este obligatoriu şi că există curbe de lărgime constantă pentru care nicio porţiune, oricât de mică, nu este arc de cerc.

2. Proprietăţi. Teorema lui Barbier. Enunţăm câteva proprietăţi importante ale curbelor de lărgime constantă [**4**,**5**,**7**]:

I. *Cercul este singura curbă de lărgime constantă care are un centru de simetrie.*

II. *Curbele de lărgime constantă au în vârfuri unghiuri interioare de cel puţin* $120°$. Numai triunghiul Reuleaux are în cele trei vârfuri unghiuri interioare de $120°$.

III. *Printre curbele de lărgime constantă, cercul mărgineşte o suprafaţă de arie maximă, iar triunghiul Reuleaux una de arie minimă.*

IV. *Cercurile înscris şi circumscris unei curbe de lărgime constantă sunt concentrice şi suma razelor lor este egală cu lărgimea curbei.*

Am văzut deja că perimetrul triunghiului Reuleaux este dat de formula $P = \pi d$, unde d este lărgimea sa (în acest caz, egală cu lungimea l a laturii triunghiului echilateral de bază) şi tot prin calcul elementar se verifică că formula este valabilă pentru orice poligon Reuleaux. O proprietate surprinzătoare a curbelor de lărgime constantă a fost stabilită în anul 1860 de către matematicianul francez *Joseph-Émile Barbier* (1838-1889).

Teorema lui Barbier. *Curbele de lărgime constantă d au perimetrul egal cu πd.*

Demonstraţie. Vom putea da doar o schiţă de demonstraţie, bazată pe conceptul algebric de adunare Minkowski a mulţimilor convexe. Un punct O fiind luat ca origine de vectori, suma a două mulţimi convexe K_1 şi K_2 este mulţimea, notată K_1+K_2, formată din extremităţile vectorilor $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\forall A \in K_1$ şi $\forall B \in K_2$ (adunarea vectorilor efectuându-se după regula paralelogramului). Vom utiliza următoarele proprietăţi ale sumei de mulţimi convexe [**4**,**7**]: 1) lărgimea mulţimii sumă într-o direcţie dată este suma lărgimilor mulţimilor termen în acea direcţie; 2) perimetrul sumei este egal cu suma perimetrelor mulţimilor termen; 3) suma dintre o mulţime convexă şi simetrica sa faţă de un punct arbitrar are o simetrie centrală.

Putem acum demonstra afirmaţia enunţată. Fie K o curbă de lărgime constantă d şi fie K' simetrica sa faţă de un punct luat arbitrar. K' este tot o curbă de lărgime constantă d şi cu acelaşi perimetru ca şi K. Conform proprietăţii 1), $K + K'$ este o curbă de lărgime constantă egală cu $2d$, iar din 2) rezultă că perimetrul sumei $K + K'$ este egal cu suma perimetrelor mulţimilor K şi K'. Pe de altă parte, conform proprietăţilor 3) şi **I,** deducem că suma $K + K'$ este un cerc. Aşadar, suma perimetrelor mulţimilor K şi K' este egală cu perimetrul cercului de diametru $2d$, adică $\pi \cdot 2d$. Obţinem că dublul perimetrului mulţimii K este egal cu $2\pi d$, deci perimetrul mulţimii K este πd, ceea ce trebuia arătat.

Obsevaţie. În [**3**], pentru teorema lui Barbier este prezentată o demonstraţie probabilistică elementară ce are la bază *problema acului lui Buffon.*

3. Rotaţia într-un pătrat. Fie $\mathcal{C}$ o curbă de lărgime constantă d şi Δ o direcţie arbitrară. Se trasează atât dreptele de sprijin perpendiculare pe Δ cât şi acelea paralele cu Δ. Cele două perechi de drepte determină un pătrat de latură d circumscris curbei $\mathcal{C}$. Rotind direcţia Δ, acest pătrat se va roti în jurul curbei $\mathcal{C}$ rămânând în orice moment circumscris ei. Altfel spus, fixând pătratul, curba $\mathcal{C}$ se va roti fiind înscrisă în orice moment în pătrat.

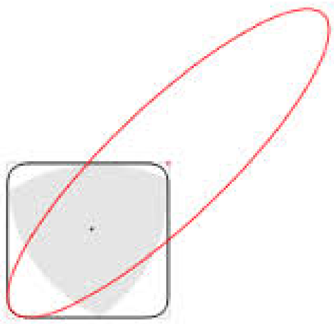
Fig. 6

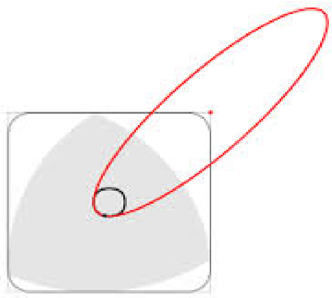
Fig. 7

Să luăm drept curbă $\mathcal{C}$ un triunghi Reuleaux şi să-l rotim în pătratul circumscris lui. În orice moment al rotaţiei, două dintre vârfurile triunghiului ating două laturi adiacente ale pătratului, pe când al treilea vârf parcurge un arc de curbă în apropierea celui de-al patrulea vârf al pătratului [**5**]. *Gleißner* şi *Zeitler* (2000) arată că mulţimea acoperită de triunghiul Reuleaux se obţine ,,rotunjind" colţurile pătratului la arce de elipsă şi stabilesc elementele care determină elipsele din care fac parte cele patru arce (în fig. 6 este indicată această mulţime şi una dintre elipse). Suprafaţa acoperită este aproximativ 98,77% din suprafaţa pătratului. Menţionăm şi faptul că pe parcursul rotirii centrul triunghiului Reuleaux nu rămâne fix, ci trasează o curbă formată din patru arce de elipsă (*Wagon*, 1991), care este indicată în fig. 7 [**6**].

Aceste proprietăţi ale triunghiului Reuleaux stau la baza construirii burghielor care pot da găuri ,,aproape pătrate", a unor mecanisme care transformă un tip de mişcare în altul, proiectoarelor de film sau a compresorului rotativ al motorului Wankel. Alte poligoane Reuleaux sunt utilizate pentru a face găuri pentagonale, hexagonale sau octogonale.

4. Extinderi în spaţiu. Se spune că un corp convex din $\mathbb{R}^3$ este de *lărgime constantă d*, dacă distanţa dintre planele oricărei perechi de plane de sprijin ale sale este egală cu d. Există o infinitate de corpuri de lărgime constantă d. Sfera este cel mai simplu exemplu de acest fel. Dar, spre deosebire de situaţia similară din plan, nu există corpuri de lărgime constantă mărginite numai de suprafeţe de sferă (exceptând sfera însăşi).

Cel mai simplu corp de lărgime constantă, diferit de sferă, se obţine rotind un triunghi Releaux în jurul uneia din axele sale; corpul rezultat are volum minim printre corpurile de rotaţie de lărgime constantă dată. Similar triunghiului Reuleaux, în spaţiu avem *tetraedrul Reuleaux*, care se obţine ca intersecţie a celor patru sfere de rază l centrate în vârfurile unui tetraedru regulat de muchie l, dar acesta nu are lărgime constantă. Însă, acesta poate fi modificat în două moduri diferite şi obţinut două suprafeţe (corpuri) de lărgime constantă [**4**,**5**].

Teorema lui Barbier nu rămâne valabilă în spaţiu, corpuri de aceeaşi lărgime pot avea ariile suprafeţelor lor diferite. Avem, însă, un rezultat important în această privinţă. *Umbra* unui corp pe un plan este proiecţia ortogonală pe plan a corpului. Evident, dacă corpul are lărgime constantă d , atunci şi umbrele sale pe orice plan vor fi de lărgime constantă d; conform teoremei lui Barbier, aceste umbre au perimetrul πd. Este adevărată şi afirmaţia inversă, adică avem: *un corp convex are lărgime constantă dacă şi numai dacă umbrele sale au acelaşi perimetru.*

Bibliografie

1. H. Rademacher, O. Toeplitz – *Despre numere şi figuri*, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

2. F. Reuleaux – *The Kinematics of Machinery*, Macmillan, New York, 1876; Dover Publications, 1964.

3. G. Sudan – *Câteva probleme matematice interesante*, (cap. 5, 37-49), Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969.

4. I. M. Yaglom, V. G. Boltyansky – *Figuri convexe*, Moscova-Leningrad, 1951 (în l. rusă).

5. *https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle.*

6. *http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html.*

7. *http://www.cut-the-knot.org/ctk/Barbier.shtml.*