Inegalităţi privind derivata unei funcţii

Sorin PUŞPANĂ[1]

Abstract. In this paper, several inequalities are established regarding the extremum values of a function and its derivatives.

Keywords: differentiable function, supremum, infimum, Lagrange′s theorem.

MSC 2010: 26D99.

Prezentăm în acest articol câteva inegalităţi privind valorile extreme ale unei funcţii şi ale derivatei sale.

Teorema 1. *Dacă* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este o funcţie derivabilă, atunci au loc inegalităţile:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\inf_{x\in[a,b]}\left|f\,'(x)\right| &\le \frac{1}{2(b-a)}\left(\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)\right)\\ &\le \frac{1}{b-a}\left(\sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|-\inf_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|\right)\\ &\le \frac{1}{b-a}\left(\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)\right)\le\sup_{x\in[a,b]}\left|f\,'(x)\right|.\end{aligned}\tag{1}$$

Demonstraţie. Prima inegalitate din (1) este echivalentă cu

$$\inf_{x\in[a,b]}\left|f\,'(x)\right|\le\frac{1}{b-a}\left(\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)\right).$$

Dacă derivata se anulează cel puţin într-un punct al intervalului $[a,b]$, atunci $\inf_{x\in[a,b]}\left|f\,'(x)\right|=0$, iar inegalitatea este evidentă. În caz contrar, rezultă că f este strict crescătoare, pentru a face o alegere, caz în care inegalitatea devine $\inf_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|\le\frac{1}{b-a}\left[f(b)-f(a)\right]$, adevărat conform teoremei lui Lagrange.

A doua inegalitate din (1) este echivalentă cu

$$\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)\le2\left(\sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|-\inf_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|\right).$$

Dacă $f\le0$ pe $[a,b]$ sau $f\ge0$ pe $[a,b]$, atunci inegalitatea devine $0\le\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)$, deci este adevărată. Dacă f ia şi valori pozitive şi valori negative, rezultă că f se anulează pe intervalul $[a,b]$, deci $\inf_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|=0$, iar inegalitatea se scrie:

$$\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)\le2\sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|\Leftrightarrow$$

[1] Profesor, Craiova; e-mail: *sorin.puspana@yahoo.com*

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) \le 2\max\left(-\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) + \left|\sup_{x\in[a,b]} f(x) + \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right|$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \left|\sup_{x\in[a,b]} f(x) + \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right|.$$

A treia inegalitate din (1) este echivalentă cu

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| - \inf_{x\in[a,b]} |f(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Procedăm ca mai sus. Dacă $f \le 0$ pe $[a,b]$ sau $f \ge 0$ pe $[a,b]$, atunci inegalitatea devine egalitate. În caz contrar, rezulta că se anulează pe intervalul $[a,b]$, deci $\inf_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0$, iar inegalitatea se scrie succesiv

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \max\left(-\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x)\right) \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) + \left|\sup_{x\in[a,b]} f(x) + \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right| \le 2\left(\sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|\sup_{x\in[a,b]} f(x) + \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right| \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Dacă $\sup_{x\in[a,b]} f(x) + \inf_{x\in[a,b]} f(x) \le 0$, inegalitatea devine $\sup_{x\in[a,b]} f(x) \ge 0$, deci este adevărată, iar dacă $\sup_{x\in[a,b]} f(x) + \inf_{x\in[a,b]} f(x) \ge 0$, atunci inegalitatea devine $\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le 0$, deci este adevărată şi de această dată.

În fine, pentru a patra inegalitate din (1) avem:

$$\frac{1}{b-a}\left(\sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right) \le \frac{1}{b-a} \sup_{x,y\in[a,b]} [f(x) - f(y)]$$

$$\le \frac{1}{b-a} \sup_{x,y\in[a,b]} |f(x) - f(y)| \le \sup_{x,y\in[a,b]} |f'(c_{xy})| \le \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|,$$

unde c_{xy} este valoarea intermediară din teorema lui Lagrange.

Teorema este complet demonstrată.

Teorema 2. *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă şi $p, q \in [0,1]$, $p+q = 1$, atunci au loc inegalităţile:*

$$\max(p,q) \inf_{x\in[a,b]} |f'(x)| \le \frac{1}{b-a} \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f(pa+qb)| \le$$

$$\le \max(p,q) \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|. \tag{2}$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-f(pa+qb)$. şi scriem inegalitatea precedentă în forma

$$\max(p,q)\inf_{x\in[a,b]}|g'(x)|\le\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\le\max(p,q)\sup_{x\in[a,b]}|g'(x)|\,. \tag{3}$$

Dacă, prin absurd, prima inegalitate din (3) nu are loc, atunci avem succesiv:

$$\max(p,q)\inf_{x\in[a,b]}|g'(x)|>\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\ge\frac{1}{b-a}|g(x)|=$$
$$=\frac{1}{b-a}|x-x_0|\,|g'(c_x)|\ge\frac{1}{b-a}|x-x_0|\cdot\inf_{x\in[a,b]}|g'(x)|\,,\ \forall x\in[a,b]\,,$$

unde c_x este dat de teorema lui Lagrange, iar $x_0=pa+qb$. De aici rezultă că

$$\max(p,q)>\frac{1}{b-a}|x-x_0|\,,\ \forall x\in[a,b]\Leftrightarrow\max(p,q)>\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|x-x_0|\,.$$

Cum $\sup_{x\in[a,b]}|x-x_0|=(b-a)\max(p,q)$, obţinem că $\max(p,q)>\max(p,q)$, absurd.

Pentru a doua inegalitate din (3), procedăm la fel. Presupunem că

$$\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|>\max(p,q)\sup_{x\in[a,b]}|g'(x)|\,.$$

Obţinem succesiv:

$$\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|x-x_0|\cdot\sup_{x\in[a,b]}|g'(c_x)|\ge\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|x-x_0|\,|g'(c_x)|$$
$$=\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|>\max(p,q)\sup_{x\in[a,b]}|g'(x)|\ge\max(p,q)\cdot\sup_{x\in[a,b]}|g'(c_x)|\,.$$

Rezultă că $\sup_{x\in[a,b]}|x-x_0|>(b-a)\max(p,q)\,,\ \forall x\in[a,b]$, adică $(b-a)\max(p,q)>(b-a)\max(p,q)$, absurd.

Corolar. *Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă şi $p,q\in[0,1]$, $p+q=1$, atunci are loc inegalitatea:*

$$|pf(a)+qf(b)-f(pa+qb)|\le(b-a)\max(p,q)\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\,. \tag{4}$$

Demonstraţie. Folosind Teorema 2, obţinem succesiv:

$$\begin{aligned}|pf(a)+qf(b)-f(pa+qb)|&=|pf(a)+qf(b)-(p+q)f(pa+qb)|\\&\le p\,|f(a)-f(pa+qb)|+q\,|f(b)-f(pa+qb)|\\&\le\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-f(pa+qb)|\\&\le(b-a)\max(p,q)\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\,.\end{aligned}$$