O rafinare a unei inegalităţi a lui Z. Yun

Vasile JIGLĂU[1]

Abstract. In this Note, the inequality (4) is established ; it offers a refinement of the inequalities (1) and (2).

Keywords: bicentric quadrilateral, circumcircle, incircle, Euler-like inequality.

MSC 2010: 51M04, 51M16.

Un *patrulater bicentric* $ABCD$ este un patrulater convex inscriptibil şi circumscriptibil. Pentru astfel de patrulatere este binecunoscută următoarea formulă de tip Euler:

$$R \geq r\sqrt{2}, \tag{1}$$

unde R, r notează razele cercurilor lor circumscris, respectiv înscris.

În [**5**], **Zhang Yun** stabileşte inegalitatea

$$\frac{r\sqrt{2}}{R} \leq \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}\right) \leq 1, \tag{2}$$

care reprezintă o rafinare a inegalităţii (1) (a se vedea şi [**2**]).

La rândul ei, dubla inegalitate (2) poate fi rafinată. Acesta este scopul prezentei Note.

Vom începe prin a aminti câteva proprietaţi ale patrulaterelor bicentrice, care vor fi utile mai jos (în mod obişnuit, $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA, e = AC, f = BD$, iar $p, S-$semiperimetrul, respectiv aria patrulaterului):

1) $ac + bd = ef$, $a + c = b + d = p$;

2) $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{bc}{ad+bc}}, \sin\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{cd}{ab+cd}},\ \sin\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{ad}{ad+bc}},\ \sin\dfrac{D}{2} = \sqrt{\dfrac{ab}{ab+cd}}$;

3) $(ab + cd)(ad + bc) = p^2(ef - 4r^2)$;

4) $ef = 2r(\sqrt{4R^2 + r^2} + r)$;

5) $S = \sqrt{abcd} = rp$.

pentru care se poate consulta [**3**], paragraful 15.

De asemenea, vom avea nevoie de inegalităţile (v. [**4**], p. 406):

$$8r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r) \leq p^2 \leq (\sqrt{4R^2 + r^2} + r)^2. \tag{3}$$

Propoziţie. *În orice patrulater bicentric $ABCD$ au loc inegalităţile:*

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{r\sqrt{2}}{R}} \leq \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}\right) \leq \\ \leq \frac{\sqrt{4R^2 + r^2} + r}{2\sqrt{2}R} \leq 1.\end{aligned} \tag{4}$$

[1] e-mail: *jiglau_vasile@yahoo.com*

Avem egalitate peste tot dacă şi numai dacă $ABCD$ este pătrat.

Demonstraţie. Mai întâi, vom exprima suma

$$\Sigma = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}$$

funcţie de elementele liniare ale patrulaterului. Utilizând formulele, 1)-3), avem:

$$\Sigma = \frac{p\left(\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\right)}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}} = \frac{p\sqrt{(ac+bd)+2\sqrt{abcd}}}{p\sqrt{ef-4r^2}} = \sqrt{\frac{ef+2rp}{ef-4r^2}}$$

sau, cu formula 4), obţinem Σ funcţie de p, R, şi r:

$$\Sigma = \sqrt{\frac{p+r+\sqrt{4R^2+r^2}}{\sqrt{4R^2+r^2}-r}} = \frac{1}{2R}\sqrt{p\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)+\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2}.$$

Prima inegalitate din enunţ este echivalentă cu

$$16\sqrt{2}Rr \le p\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)+\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2$$

şi va fi stabilită dacă arătăm că au loc următoarele două inegalităţi:

$$8\sqrt{2}Rr \le p\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right), \tag{5}$$

$$8\sqrt{2}Rr \le \left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2. \tag{6}$$

Ţinând seama de (3), inegalitatea din partea stângă, pentru a dovedi (5) este suficient să verificăm că

$$8\sqrt{2}Rr \le \sqrt{8r(\sqrt{4R^2+r^2}-r)}\cdot\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right) \Longleftrightarrow 4R\sqrt{r} \le$$
$$\le 2R\sqrt{\sqrt{4R^2+r^2}+r} \Longleftrightarrow 4r \le \sqrt{4R^2+r^2}+r \Longleftrightarrow r\sqrt{2} \le R$$

este adevărată. Răspuns afirmativ, căci ultima este inegalitatea lui Euler. În privinţa inegalităţii (6), avem:

$$\begin{aligned}8\sqrt{2}Rr \le \left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2 &\Longleftrightarrow 4\sqrt{2}Rr \le 2R^2+r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}\\ &\Longleftrightarrow 0 \le 2\left(R-r\sqrt{2}\right)^2 + r\left(\sqrt{4R^2+r^2}-3r\right)\\ &\Longleftrightarrow 0 \le 2\left(R-r\sqrt{2}\right)^2 + \frac{4r\left(R^2-2r^2\right)}{\sqrt{4R^2+r^2}+3r},\end{aligned}$$

iar aceasta din urmă este adevărată tot datorită inegalităţii lui Euler. Este uşor de văzut că această primă inegalitate devine egalitate dacă şi numai dacă $ABCD$ este pătrat. Demonstrarea primei inegalităţi din (4) este încheiată.

Să demonstrăm acum a doua inegalitate din (4). Într-adevăr, avem:

$$\frac{1}{2}\Sigma \leq \frac{\sqrt{4R^2+r^2}+r}{2\sqrt{2}R} \Longleftrightarrow p\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)+\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2 \leq$$
$$\leq 2\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2 \Longleftrightarrow p \leq \sqrt{4R^2+r^2}+r,$$

ultima fiind a doua parte a inegalităţii (3). Ca urmare, în a doua inegalitate din (4) avem egalitate în condiţia specificată în [**4**], p. 406, adică dacă şi numai dacă patrulaterul $ABCD$ are cel puţin o pereche de unghiuri opuse drepte.

Cea de-a treia şi ultima inegalitate din (4) este echivalentă cu

$$\begin{aligned}\sqrt{4R^2+r^2}+r \leq 2\sqrt{2}R &\Longleftrightarrow r^2+r\sqrt{4R^2+r^2} \leq 2R^2\\ &\Longleftrightarrow 0 \leq 2\left(R^2-2r^2\right)+r\left(3r-\sqrt{4R^2+r^2}\right)\\ &\Longleftrightarrow 0 \leq 2\left(R^2-2r^2\right)\left(3r+\sqrt{4R^2+r^2}\right)+4r\left(2r^2-R^2\right)\\ &\Longleftrightarrow 0 \leq 2\left(R^2-2r^2\right)\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right),\end{aligned}$$

evident adevărată. Aceasta devine egalitate dacă şi numai dacă $ABCD$ este pătrat. Propoziţia este complet demonstrată.

Observaţia 1. Deoarece $\dfrac{r\sqrt{2}}{R} \leq \sqrt{\dfrac{r\sqrt{2}}{R}}$, inegalitatea din Propoziţie reprezintă o rafinare a inegalităţii (2), ca şi a inegalităţii care constituie fondul notei matematice [**1**] (se va ţine seama de faptul că $\Sigma \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}=\Sigma\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}\Sigma\cos\dfrac{A-B}{2}$).

Prin calcule simple, constatăm că al treilea termen al inegalităţii (4) se exprimă prin laturi astfel:

$$\frac{\sqrt{4R^2+r^2}+r}{2\sqrt{2}R}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}}. \tag{7}$$

Într-adevăr, pe baza formulelor 1), 3) şi 4), avem:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{ef}{ef-4r^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{4R^2+r^2}+r}{\sqrt{4R^2+r^2}-r}}=\frac{\sqrt{4R^2+r^2}+r}{2\sqrt{2}R}.$$

Observaţia 2. O cunoscută formulă a lui **L.Carlitz** precizează distanţa dintre centrul cercului înscris I şi centrul cercului circumscris O ale patrulaterului bicentric $ABCD$:

$$OI^2=R^2-2Rr\sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}}. \tag{8}$$

Din faptul că $OI^2 \geq 0$, deducem inegalitatea următoare:

$$\frac{R}{r\sqrt{2}} \geq \sqrt{2\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}}. \tag{9}$$

Din Propoziţie şi ţinând seama de relaţia (7), rezultă că

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}} \leq 1.$$

Ca urmare, (9) este întărită de următoarea inegalitate:

$$\frac{R}{r\sqrt{2}} \geq 2\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}. \tag{10}$$

Bibliografie

1. **M. Bencze** – *O rafinare a inegalităţii lui Euler $R \geq r\sqrt{2}$*, Recreaţii Matematice, 11 (2009), f.1, 15-16.
2. **M. Josefsson** – *A New Proof of Yun's Inequality for Bicentric Quadrilaterals*, Forum Geometricorum, 12 (2012), 79-82.
3. **D. Mihalca** et al. – *Geometria patrulaterului* (in Romanian), Ed. Teora, 1998.
4. **D.S. Mitrinović** et al. – *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer, 1989.
5. **Z. Yun** – *Euler's Inequality Revisited*, Mathematical Spectrum, 40 (2008), 119-121.
