Relaţii vectoriale între elementele unui triunghi

Marcel CHIRIŢĂ[1]

Abstract. In this Note we establish a couple of vector identities involving the elements of a triangle. As an application, several geometric inequalities are obtained.

Keywords: median, angle-bisector, altitude, perimeter, area.

MSC 2010: 51M04.

În acest articol vom stabili câteva relaţii vectoriale între elementele unui triunghi, iar în final vom demonstra câteva identităţi vectoriale şi vom da câteva aplicaţii.

I. Propoziţie. *Să se arate că în orice triunghi au loc relaţiile vectoriale:*

1) $\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{i_a} = p(p-a)$ *şi analoagele,*

2) $\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{h_a} = \dfrac{4S^2}{a^2}$ *şi analoagele,*

3) $\overrightarrow{i_a} \cdot \overrightarrow{h_a} = \dfrac{4S^2}{a^2}$ *şi analoagele,*

4) $\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{a} = \dfrac{1}{2}(b^2+c^2)$ *şi analoagele.*

Vom demonstra mai întâi următoarele rezultate:

Lema 1. *Dacă ABC este un triunghi oarecare, $M \in (BC)$ şi $\dfrac{MB}{MC} = k$, atunci* $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}$.

Demonstraţie. Din $\dfrac{MB}{MC} = k$ rezultă că $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{MC}$, deci $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$, de unde $\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{AC}$ sau $\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$ şi, prin urmare, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}$.

Lema 2. *În orice triunghi sunt adevărate relaţiile:*

5) $\overrightarrow{m_a} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ *şi analoagele,*

6) $\overrightarrow{i_a} = \dfrac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$ *şi analoagele,*

7) $\overrightarrow{h_a} = \dfrac{b\cos C \cdot \overrightarrow{AB} + c\cos B \cdot \overrightarrow{AC}}{b\cos C + c\cos B} = \dfrac{b\cos C \cdot \overrightarrow{AB} + c\cos B \cdot \overrightarrow{AC}}{a}$ *şi analoagele.*

Demonstraţie. Aceste relaţii se obţin aplicând Lema 1 şi ţinând seama de faptul că avem $k=1$ pentru mediană, $k = \dfrac{c}{b}$ pentru bisectoare şi $k = \dfrac{c\cos B}{b\cos C}$ pentru înălţime (evident, toate trei corespunzătoare laturii a).

[1]Profesor, Bucureşti; e-mail: *marc.chirita@yahoo.ro*

Demonstraţia Propoziţiei. 1) Ţinând seama de 5) şi 6), avem:

$$\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\cdot\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}=\frac{bc^2}{2(b+c)}+\frac{cb^2}{2(b+c)}+\left[\frac{c}{2(b+c)}+\frac{b}{2(b+c)}\right]\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{bc}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)\right]=\frac{1}{4}\left[(b+c)^2-a^2\right]=p(p-a).$$

2) Cu relaţiile 5) şi 7) obţinem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{h_a}&=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\cdot\frac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB}+c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{a}=\\&=\frac{bc^2\cos C+b^2c\cos B}{2a}+\left(\frac{c\cos B+b\cos C}{2a}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\\&=\frac{bc}{2a}\left(c\cos C+b\cos B\right)+\frac{1}{4}\left(b^2+c^2-a^2\right)=\\&=\frac{bc}{2a}\left(c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+b\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)+\frac{1}{4}\left(b^2+c^2-a^2\right)\\&=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2}=\frac{4S^2}{a^2}\end{aligned}$$

(în ultimul pas s-a folosit formula lui Heron pentru aria triunghiului în forma $16S^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$).

3) Procedăm la fel. Utilizând relaţiile 6) şi 7), avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{i_a}\cdot\overrightarrow{h_a}&=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}\cdot\frac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB}+c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{a}=\\&=\frac{1}{a\,(b+c)}\left[b^2c^2\left(\cos C+\cos B\right)+bc\left(\cos C+\cos B\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right]=\\&=\frac{bc\left(\cos C+\cos B\right)}{2a\,(b+c)}\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right).\end{aligned}$$

Înlocuind $\cos C$, $\cos B$ cu expresiile lor date de teorema cosinusului, după calcule de rutină obţinem că

$$\overrightarrow{i_a}\cdot\overrightarrow{h_a}=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2}=\frac{16S^2}{4a^2}=\frac{4S^2}{a^2},$$

de unde rezultă relaţia cerută.

4) Avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{a}&=m_a\cdot a\cdot\cos\left(\overrightarrow{m_a}\,,\ \overrightarrow{a}\right)=m_a\cdot a\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^2+m_a^2-b^2}{m_a\cdot a}=\\&=\frac{1}{4}\left(a^2+4m_a^2-4b^2\right)=\frac{1}{2}(b^2+c^2).\end{aligned}$$

II. Din Propoziţia stabilită, prin sumare, obţinem direct următoarele identităţi vectoriale:

$$\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{i_a} + \overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{i_b} + \overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{i_c} = p^2, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{h_a} + \overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{h_b} + \overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{h_c} = 4S^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right), \tag{2}$$

$$\overrightarrow{i_a} \cdot \overrightarrow{h_a} + \overrightarrow{i_b} \cdot \overrightarrow{h_b} + \overrightarrow{i_c} \cdot \overrightarrow{h_c} = 4S^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right), \tag{3}$$

$$\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{c} = a^2 + b^2 + c^2. \tag{4}$$

Identităţile vectoriale precedente pot fi utilizate pentru a obţine inegalităţi interesante relativ la triunghiuri. Astfel, pornind de la (1), prin utilizarea inegalităţii triunghiulare se obţine:

$$p^2 = \left| \overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{i_a} + \overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{i_b} + \overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{i_c} \right| \leq \left| \overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{i_a} \right| + \left| \overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{i_b} \right| + \left| \overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{i_c} \right| \leq$$
$$\leq m_a \cdot i_a + m_b \cdot i_b + m_c \cdot i_c,$$

deci

$$p^2 \leq m_a \cdot i_a + m_b \cdot i_b + m_c \cdot i_c. \tag{5}$$

Pe de altă parte, din $\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{i_a} = p(p-a)$ urmează că

$$p(p-a) \leq m_a \cdot i_a \leq \left(\frac{m_a + i_a}{2} \right)^2,$$

deci

$$m_a + i_a \geq 2\sqrt{p(p-a)}.$$

Sumând aceasta cu analoagele ei, se obţine că

$$m_a + i_a + m_b + i_b + m_c + i_c \geq 2 \left(\sqrt{p(p-a)} + \sqrt{p(p-b)} + \sqrt{p(p-c)} \right) \tag{6}$$

sau, aplicând membrului drept inegalitatea mediilor,

$$m_a + i_a + m_b + i_b + m_c + i_c \geq 6\sqrt[3]{pS}. \tag{7}$$

Bibliografie

1. **M. Chiriţă, D. Gheorghiu** – *Aplicaţii ale calcului vectorial în matematica de liceu*, Ed. Sigma, 2003.
2. **Alric Tournier** – *Géometrie vectorielle*, Ed. Mcgraw-Hill, Montreal, 1983.
3. – *Gazeta Matematică. Colecţie,* 1980-2012.