ARTICOLE ŞI NOTE

Grupuri finite cu proprietatea (P)

Marius Tărnăuceanu [1]

Abstract. In this paper we characterize the finite groups that have the property (P).
Keywords: finite abelian groups, automorphisms.

MSC 2010: 20K01, 20K30.

1. Introducere. Problema 2 de la faza judeţeană a *Olimpiadei de Matematică 2013*, clasa a XII-a, are următorul enunţ:

Problemă. *Un grup* $(G, \cdot)$ *are proprietatea* (P) *dacă*

$$\boldsymbol{(P)} \quad \forall \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{Aut(G)}, \exists \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{Aut(G)} \;\; \textbf{\textit{astfel încât}} \;\; \boldsymbol{f(x) = g(x) \cdot h(x)}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G}.$$

Să se arate că:

(a) *Orice grup cu proprietatea* (P) *este abelian.*

(b) *Orice grup abelian finit de ordin impar are proprietatea* (P).

(c) *Niciun grup finit de ordin* $4n + 2$, $n \in \mathbb{N}$, *nu are proprietatea* (P).

Soluţia prezentată în barem se încheie cu o remarcă interesantă, anume că există grupuri de ordin $4n$ care au proprietatea (P) - e.g., grupul lui Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ - şi grupuri de ordin $4n$ care nu o au - e.g., grupul aditiv $\mathbb{Z}_4$.

Cerinţele problemei, împreună cu remarca anterioară, conduc la întrebarea firească:

Care sunt grupurile ce satisfac proprietatea (P)?

Pentru cazul finit suntem în măsură să dăm un răspuns la această întrebare. Mai precis, vom proba următorul rezultat.

Teorema 1.1. *Un grup finit* G *are proprietatea* (P) *dacă şi numai dacă* $G \cong G_1 \times G_2$, *unde* G_1 *este un* 2*-grup abelian de tipul*

$$\mathbb{Z}_{2^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{\alpha_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{\alpha_k}} \;\; cu \; |\{j \mid \alpha_j = \alpha_i\}| \geq 2, \; \forall \, i = 1, 2, ..., k,$$

iar G_2 *este un grup abelian de ordin impar.*

În particular, putem decide care din grupurile finite de ordin $4n$ cu n impar au proprietatea (P).

Corolarul 1.2. *Grupurile finite de ordin* $4n$, $n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)$, *care au proprietatea* (P) *sunt de tipul*

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times G,$$

[1] Lector dr., Universitatea ,,Al.I. Cuza" din Iaşi, *tarnauc@uaic.ro*

iar cele care nu au această proprietate sunt de tipul

$$\mathbb{Z}_4 \times G,$$

unde G este un grup abelian de ordin n.

De asemenea, menţionăm că există şi grupuri infinite ce satisfac proprietatea (P) (spre exemplu $(\mathbb{Q}, +)$), o clasificare a acestora fiind mult mai greu de realizat.

2. Preliminarii. Principalul rezultat ca va fi utilizat este teorema de structură a grupurilor abeliene finite (a se vedea, spre exemplu, [3]).

Teorema 2.1. *Fie G un grup abelian finit. Atunci există şi sunt unice numerele naturale m, d_1, d_2, ..., d_m, astfel încât*

$$G \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_m},$$

unde $d_i > 1, \forall\, i = 1, 2, ..., m$, şi $d_1|d_2|...|d_m$.

Cu notaţiile din Teorema 2.1, considerăm descompunerile în produse de factori primi ale numerelor $d_1, d_2, ..., d_m$:

$$d_i = p_1^{\alpha_{i1}} p_2^{\alpha_{i2}} \cdots p_k^{\alpha_{ik}},\ i = 1, 2, ..., m.$$

Ţinând cont că pentru fiecare i are loc izomorfismul $\mathbb{Z}_{d_i} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_{i1}}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_{i2}}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_{ik}}}$,obţinem

$$G \cong G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k\,, \tag{1}$$

unde

$$G_j = \mathbb{Z}_{p_j^{\alpha_{1j}}} \times \mathbb{Z}_{p_j^{\alpha_{2j}}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_j^{\alpha_{mj}}} \text{ şi } \alpha_{1j} \le \alpha_{2j} \le ... \le \alpha_{mj},\ \forall\, j = 1, 2, ..., k.$$

Cu alte cuvinte, orice grup abelian finit este produs direct (sau, echivalent, sumă directă) de p-grupuri abeliene.

Următoarea teoremă arată că studiul grupului automorfismelor unui grup abelian finit se reduce la p-grupuri abeliene (a se vedea, spre exemplu, Lema 2.1 din [2]).

Teorema 2.2. *Fie H şi K două grupuri finite de ordine relativ prime. Atunci* $\mathrm{Aut}(H \times K) \cong \mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K)$.*În particular, dacă G este un grup abelian finit de tipul* (1)*, atunci*

$$\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(G_1) \times \mathrm{Aut}(G_2) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(G_k). \tag{2}$$

Un rezultat mai puternic decât precedentul îl constituie Teorema 3.2 din [1]. Aceasta indică forma automorfismelor unui produs direct de grupuri finite ce nu au factori direcţi comuni.

Teorema 2.3. *Fie H şi K două grupuri finite fără factori direcţi comuni. Atunci* $\mathrm{Aut}(H \times K)$ *este izomorf cu grupul multiplicativ*

$$\left\{ \begin{pmatrix} f & u \\ v & g \end{pmatrix} \mid f{\in}\mathrm{Aut}(H), g{\in}\mathrm{Aut}(K), u{\in}\mathrm{Hom}(K, Z(H)), v{\in}\mathrm{Hom}(H, Z(K)) \right\}.$$

În particular, dacă grupurile H şi K sunt abeliene, atunci $\mathrm{Aut}(H \times K)$ *este izomorf cu grupul multiplicativ*

$$\left\{ \begin{pmatrix} f & u \\ v & g \end{pmatrix} \mid f{\in}\mathrm{Aut}(H), g{\in}\mathrm{Aut}(K), u{\in}\mathrm{Hom}(K, H), v{\in}\mathrm{Hom}(H, K) \right\}.$$

Încheiem acest paragraf cu o observaţie simplă, dar extrem de utilă.

Observaţia 2.4. Un grup abelian $(G, +)$ satisface proprietatea (P) dacă şi numai dacă automorfismul identic 1_G poate fi scris sub forma

$$1_G = g + h \text{ cu } g, h \in \mathrm{Aut}(G). \tag{3}$$

Într-adevăr, dacă (3) are loc, atunci pentru orice automorfism f al lui G avem $f = f \circ 1_G = f \circ g + f \circ h$ şi $f \circ g, f \circ h \in \mathrm{Aut}(G)$.

Putem acum proba principalul nostru rezultat. Menţionăm că nu am inclus în demonstraţie verificarea proprietăţilor (a)-(c), pentru care poate fi consultată soluţia problemei considerate.

3. Demonstraţia Teoremei 1.1. Presupunem mai întâi că G satisface proprietatea (P). Atunci el este abelian şi, conform cu (1), admite o descompunere de tipul $G \cong G_1 \times G_2$,unde G_1 este un 2-grup abelian, iar G_2 este un grup abelian de ordin impar. Din Teorema 2.2 deducem că

$$\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(G_1) \times \mathrm{Aut}(G_2),$$

ceea ce arată că G_1 şi G_2 satisfac, de asemenea, proprietatea (P). Este suficient să indicăm structura lui G_1. Avem

$$G_1 \cong \mathbb{Z}_{2^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{\alpha_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{\alpha_k}}, \text{ unde } 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k.$$

Dacă, prin absurd, există $i \in \{1, 2, ..., k\}$ astfel încât $\alpha_j \neq \alpha_i$, $\forall\, j{=}1, 2, ..., i{-}1, i{+}1, ..., k$, atunci G_1 poate fi scris sub forma $G_1 = H \times K$,unde $H \cong \mathbb{Z}_{2^{\alpha_i}}$ şi $K \cong \mathbb{Z}_{2^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{\alpha_{i-1}}} \times \mathbb{Z}_{2^{\alpha_{i+1}}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{\alpha_k}}$. În plus, remarcăm că H şi K nu au factori direcţi comuni, aşadar

$$\mathrm{Aut}(G_1){\cong}\left\{ \begin{pmatrix} f & u \\ v & g \end{pmatrix} \mid f{\in}\mathrm{Aut}(H), g{\in}\mathrm{Aut}(K), u{\in}\mathrm{Hom}(K, H), v{\in}\mathrm{Hom}(H, K) \right\}$$

din Teorema 2.3. Atunci

$$1_{G_1} = \begin{pmatrix} 1_H & 0 \\ 0 & 1_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & u_1 \\ v_1 & g_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_2 & u_2 \\ v_2 & g_2 \end{pmatrix},$$

unde $f_i \in \mathrm{Aut}(H), g_i \in \mathrm{Aut}(K), u_i \in \mathrm{Hom}(K,H), v_i \in \mathrm{Hom}(H,K)$, $i = 1,2$. Rezultă că $1_H = f_1 + f_2$, ceea ce constituie o contradicţie (automorfismele lui H sunt de tipul $x \mapsto qx$ cu q impar, suma a două astfel de automorfisme nefiind un automorfism).

Reciproc, este suficient să arătăm că un 2-grup abelian de tipul

$$G = \mathbb{Z}_{2^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{\alpha_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{\alpha_k}} \text{ cu } |\{j \mid \alpha_j = \alpha_i\}| \geq 2, \forall\, i = 1,2,...,k,$$

sau, echivalent, de tipul

$$G = (\mathbb{Z}_{2^{\beta_1}})^{r_1} \times (\mathbb{Z}_{2^{\beta_2}})^{r_2} \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{2^{\beta_s}})^{r_s} \text{ cu } r_i \geq 2, \forall\, i = 1,2,...,s,$$

are proprietatea (P). De asemenea, conform Observaţiei 2.4, ne putem reduce la cazul $s = 1$. Avem astfel de probat că pentru un 2-grup abelian

$$G = (\mathbb{Z}_{2^\beta})^r = \underbrace{\mathbb{Z}_{2^\beta} \times \mathbb{Z}_{2^\beta} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^\beta}}_{r \text{ ori}} \text{ cu } r \geq 2$$

automorfismul identic 1_G poate fi scris ca suma a două automorfisme ale lui G. Ţinând cont că automorfismele grupului abelian G coincid cu automorfismele $\mathbb{Z}_{2^\beta}$-modulului $(\mathbb{Z}_{2^\beta})^r$, iar acestea se identifică cu matricele inversabile de ordin r peste $\mathbb{Z}_{2^\beta}$, trebuie să arătăm că

$$\exists\, A_r, B_r \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}_{2^\beta}) \text{ astfel încât } I_r = A_r + B_r. \tag{4}$$

Vom verifica această afirmaţie prin inducţie după r. Pentru $r = 2$ considerăm

$$A_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix} \text{ şi } B_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & -\hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix},$$

iar pentru $r = 3$ considerăm

$$A_3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \text{ şi } B_3 = \begin{pmatrix} \hat{0} & -\hat{1} & -\hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ -\hat{1} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

Fie $r \geq 4$. Presupunem că (4) este adevărată pentru orice r' satisfăcând $2 \leq r' < r$ şi o verificăm pentru r. Avem

$$I_r = A_r + B_r,$$

unde matricele

$$A_r = \begin{pmatrix} A_{r-2} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ şi } B_r = \begin{pmatrix} B_{r-2} & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

sunt ambele inversabile, ceea ce încheie demonstraţia.

Bibliografie

1. **J.N.S. Bidwell, M.J. Curran, D.J. McCaughan** – *Automorphisms of direct products of finite groups*, Arch. Math., 86 (2006), 481-489.
2. **C. Hillar, D. Rhea** – *Automorphisms of an abelian p-group,* Amer. Math. Monthly, 114 (2007), 917-922.
3. **I.D. Ion, N. Radu** – *Algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.