Cercurile mixtliniare adjuncte înscrise asociate unui triunghi

Ion PĂTRAŞCU[1]

Abstract. In this note there are defined the inscribed adjoint mixtlinear circles associated to a triangle. The main results are Theorem 1 and 2. E.g., the triangle determined by the centers of the inscribed adjoint mixtlinear circles and the triangle tangential to the given triangle are orthological.

Keywords: inscribed adjoint mixtlinear circles, Apollonius circle, Brocard′s angle, orthological triangle.

MSC 2010: 67G40.

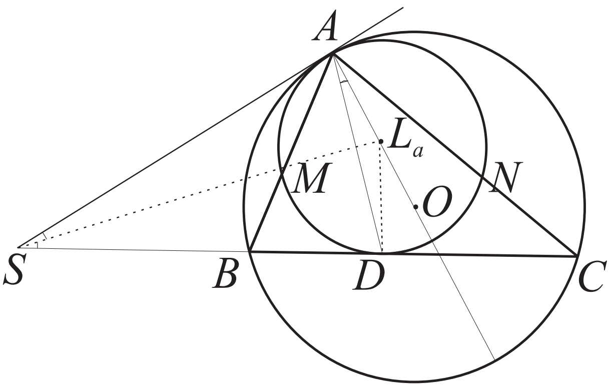
În acest articol definim cercurile mixtliniare adjuncte asociate unui triunghi şi evidenţiem câteva proprietăţi ale lor.

Definiţie. Numim cerc *mixtilinar adjunct înscris* al unui triunghi dat un cerc tangent (interior) cercului circumscris triunghiului într-un vârf al său şi tangent la latura opusă vârfului considerat.

Observaţie. Evident, pentru orice triunghi, avem trei cercuri mixtliniare adjuncte înscrise. Mai observăm că avem şi trei cercuri *mixtliniare adjuncte exînscrise*, care sunt tangente exterior cercului circumscris triunghiului dat şi îndeplinesc celelalte condiţii din definiţia de mai sus. Ne vom ocupa numai de cercurile mixtliniare înscrise; le vom numi, după vârful triunghilui ABC prin care trec, *A-mixtliniar adjunct înscris* etc.

Propoziţia 1. *Punctul de tangenţă cu BC al cercului A-mixtliniar adjunct înscris este piciorul bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{A}$.*

Demonstraţie. Notăm cu L_a centrul cercului A-mixtliniar adjunct înscris şi cu D contactul acestuia cu latura BC. Fie S intersecţia tangentei în vârful A la cercul circumscris triunghiului ABC cu latura BC (în figură $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$). În mod obişnuit, cu 0 notăm centrul cercului circumscris.



În $\triangle OAC$ avem: $m(\widehat{OAC}) = 90^\circ - m(\widehat{B})$. Apoi, $m(\widehat{OAD}) = m(\widehat{ASL_a}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ASC}) = \frac{1}{4}[m(\widehat{AC}) - m(\widehat{AB})] = \frac{1}{2}[m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})]$.

Ca urmare, combinând rezultatele obţinute, $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{OAC}) + m(\widehat{OAD}) = 90^\circ - m(\widehat{B}) + \frac{1}{2}[m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})] = \frac{1}{2}m(\widehat{A})$, adică D este piciorul bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{A}$.

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Fraţii Buzeşti", Craiova

Analog se demonstrează proprietatea în cazul triunghiurilor obtuzunghice. Dacă triunghiul ABC este isoscel sau echilateral, demonstraţia este imediată.

Propoziţia 2. *Cercul A-mixtliniar adjunct înscris intersectează laturile AB şi AC în extremităţile unei coarde paralele cu BC.*

Demonstraţie. Notăm cu M şi N punctele de intersecţie a cercului A-mixtliniar adjunct înscris cu AB, respectiv AC. Avem: $m(\widehat{CDN}) = m(\widehat{DAN}) = \frac{1}{2}m(\widehat{A})$ şi, pe de altă parte, $m(\widehat{DNM}) = m(\widehat{MAD}) = \frac{1}{2}m(\widehat{A})$. Rezultă că $\widehat{CDN} \equiv \widehat{DNM}$, ceea ce implică $MN \| BC$.

Observaţie. Afirmaţia $MN\|BC$ decurge şi din omotetia cercurilor A-mixtliniar adjunct înscris şi circumscris triunghiului, centrul de omotetie fiind vârful A.

Propoziţie. *Raza r_A a cercului A-mixtliniar înscris este dată de formula:*

$$r_A = \frac{4p(p-a)R}{(b+c)^2}. \tag{1}$$

Demonstraţie. *Soluţia I.* Aplicând teorema sinusurilor în $\triangle AMN$ şi $\triangle ABC$, obţinem: $MN = 2r_A \sin A$ şi $a = 2R\sin A$, de unde

$$r_A = \frac{R}{a} \cdot MN.$$

Deoarece $\triangle AMN \sim \triangle ABC$, avem că $MN = \frac{a}{b}AN$. Ca urmare,

$$r_A = \frac{R}{b}AN.$$

Puterea punctului C faţă de cercul A-mixtliniar adjunct înscris se scrie: $CN \cdot CA = CD^2$ şi cum $CD = \frac{ab}{b+c}$ (consecinţă a teoremei bisectoarei), rezultă că $CN = \frac{a^2b}{(b+c)^2}$. Cum $AN = b - CN$, decurge că $AN = \frac{4p(p-a)b}{(b+c)^2}$. Înlocuind această expresie găsită, vom avea

$$r_A = \frac{R}{b} \cdot \frac{4p(p-a)b}{(b+c)^2} = \frac{4p(p-a)R}{(b+c)^2}$$

şi, deci, formula dorită.

Soluţia II. În $\triangle L_aAD$ avem: $L_aA = L_aD = r_A$, $AD = l_a$ (=lungimea bisectoarei din A) şi $m(\widehat{L_aAD}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})]$. Atunci,

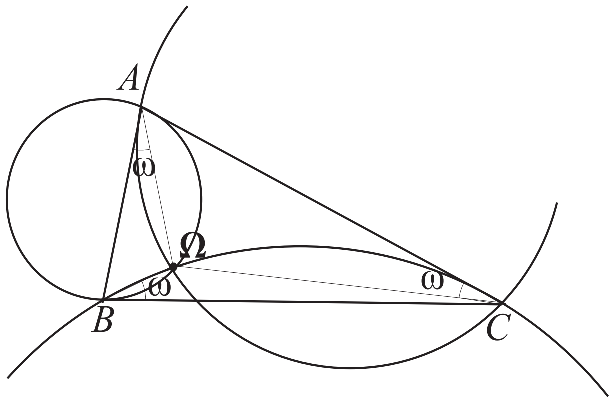
$$r_A = \frac{AD}{2\cos \widehat{L_aAD}} = \frac{l_a}{2\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Folosind formule ca $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$, $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$ etc., după efectuarea calculelor se obţine (1).

Observaţie. Pentru raza r_A reţinem şi formulele:

$$r_A = \frac{bc}{b+c}\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} = R\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]. \tag{2}$$

Vom aminti acum câteva noţiuni şi rezultate necesare în continuare.



Se numeşte *cerc adjunct* al unui triunghi ABC un cerc ce trece prin două vârfuri ale sale şi în unul dintre aceste vârfuri este tangent laturii respective. Un triunghi are şase cercuri adjuncte. Vom nota cu $C\overline{A}$ cercul adjunct ce conţine vârfurile C şi A şi este tangent în A laturii AB. Cercurile adjuncte $A\overline{B}$, $B\overline{C}$, $C\overline{A}$ au un punct comun Ω; analog, cercurile $B\overline{A}$, $C\overline{B}$, $A\overline{C}$ au un punct comun Ω'. Punctele Ω şi Ω' se numesc *punctele lui Brocard:* Ω este punctul *direct* al lui Brocard, iar Ω' este punctul *retrograd*. Punctele Ω şi Ω' sunt izogonal conjugate: $\widehat{\Omega AB} = \widehat{\Omega BC} = \widehat{\Omega CA} = \omega$ şi $\widehat{\Omega' AC} = \widehat{\Omega' CB} = \widehat{\Omega' BA} = \omega$. Unghiul ω se numeşte *unghiul lui Brocard*. Cititorul poate găsi alte informaţii în [**1**].

Să observăm legătura următoare: cercul A-mixtliniar adjunct înscris asociat triunghiului ABC este cerc adjunct pentru triunghiurile ADB şi ADC. Ca urmare, avem:

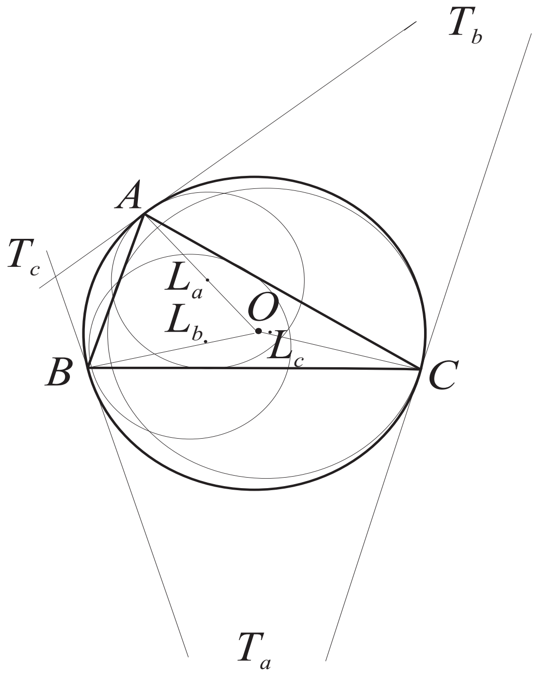
Propoziţia 4. *Într-un triunghi ABC în care D este piciorul bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{A}$, punctele A, D şi punctele directe ale lui Brocard corespunzătoare triunghiurilor ADB şi ADC sunt conciclice.*

Următoarele două teoreme indică proprietăţi remarcabile ale cercurilor mixtliniare adjuncte înscrise.

Teorema 1. *Triunghiul $L_aL_bL_c$ determinat de centrele cercurilor mixtliniare adjuncte înscrise şi triunghiul tangenţial $T_aT_bT_c$ sunt ortologice. Centrele lor de ortologie sunt O şi centrul radical al cercurilor mixtliniare adjuncte înscrise.*

Demonstraţie. Perpendicularele duse din L_a, L_b, L_c pe laturile corespunzătoare ale triunghiului tangenţial conţin razele OA, OB, respectiv OC ale cercului circumscris. Prin urmare, O este centrul de ortologie al triunghiurilor $L_aL_bL_c$ şi $T_aT_bT_c$.

Tangentele duse din T_a la cercul circumscris, T_aB şi T_aC, sunt egale. Ele sunt tangente şi la cercurile B-mixtliniar adjunct înscris, respectiv C-mixtliniar adjunct înscris. În consecinţă, T_a are puteri egale faţă de aceste cercuri şi ca atare aparţine axei radicale a lor. Cum axa radicală a două cercuri este perpendiculară pe linia centrelor acestora, urmează că perpendiculara din T_a pe L_aL_c trece prin centrul radical al cercurilor mixtliniare adjuncte înscrise, deci acest punct este centru de ortologie al triunghiurilor $L_aL_bL_c$ şi $T_aT_bT_c$.



Fiind date trei cercuri de centre diferite, se numeşte *cerc Apollonius* al lor fiecare dintre cercurile tangente celor trei cercuri date. Evident, cercul circumscris triunghuiului ABC este cerc Apollonius al cercurilor mixtliniare adjuncte înscrise asociate triunghiului.

Teorema 2. *Cercul Apollonius tangent interior cercurilor mixtliniare adjuncte înscrise are cu acestea punctele de tangenţă* T_1, T_2, *respectiv* T_3. *Dreptele* AT_1, BT_2 *şi* CT_3 *sunt concurente.*

Demonstraţie. Demonstraţia face apel la teorema lui D′Alembert (de ex., [**2**]): trei cercuri necongruente şi ale căror centre nu sunt coliniare au cele şase centre de omotetie situate câte trei pe patru drepte.

Într-adevăr, A este centrul de omotetie directă a cercului circumscris (O) şi a celui A-mixtliniar adjunct înscris (L_a); T_1 este centrul de omotetie directă a cercului Apollonius tangent interior cercurilor mixtliniare adjuncte înscrise şi a cercului (L_a), iar J este centrul de omotetie directă a cercului Apollonius şi a celui circumscris (O). Conform teoremei lui D′Alembert, rezultă că punctele A, J, T_1 sunt coliniare. Analog se arată că B, J, T_2 sunt coliniare şi C, J, T_3 sunt coliniare. În consecinţă, punctul J este punctul de concurenţă a dreptelor AT_1, BT_2 şi CT_3.

Bibliografie

1. **R.A. Johnson** – *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2007.
2. **N.N. Mihaileanu** – *Lecţii complementare de geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.